Universidad Nacional de La Plata

Departamento de Economía
Facultad de Ciencias Económicas
Universidad Nacional de La Plata

Microeconomía II

Notas de Clase

Alberto Porto[1]

Trabajo Docente No. 9
Junio 2005

[1] Profesor Titular Ordinario de Microeconomía II, Departamento de Economía, Facultad de Ciencias Económicas, UNLP.

Estas *Notas de Clase* son, en su mayor parte, versiones revisadas y actualizadas de las que fueran oportunamente publicadas en la Serie Cuadernos No 26 (1980) y No 34 (1980, 1989) Algunas de aquellas Notas no son incluidas en este volumen, en tanto que se agregan otras sobre desarrollos más recientes de algunos temas.

La utilización de estas Notas como material docente durante mucho tiempo –por cierto con actualizaciones- y las sugerencias de alumnos y graduados de reeditarlas, nos llevó a encarar la tarea que se concreta como *Trabajo Docente No* del Departamento de Economía de la Facultad de Ciencias Económicas. Al publicar estas Notas es necesario reiterar que son un complemento y no un sustituto de las clases teóricas y prácticas y de los libros de texto.

Para la revisión y actualización se contó con la colaboración de Josefina Posadas y Camilo Rubbini. Georgina Pizzolito realizó la tarea de compaginación. A todos les agradezco la colaboración.

La Plata, Junio de 2005.

Dr. Alberto Porto
Profesor Titular Ordinario
Departamento de Economía
Facultad de Ciencias Económicas
Universidad Nacional de La Plata.

CONTENIDO

NOTA SOBRE RENDIMIENTOS A ESCALA Y COSTOS

1. NOTA SOBRE RENDIMIENTOS A ESCALA Y COSTOS[2]

Para la obtención de la función de costo - que expresan el costo en función de la cantidad producida y del precio de los factores- se parte del siguiente sistema de ecuaciones

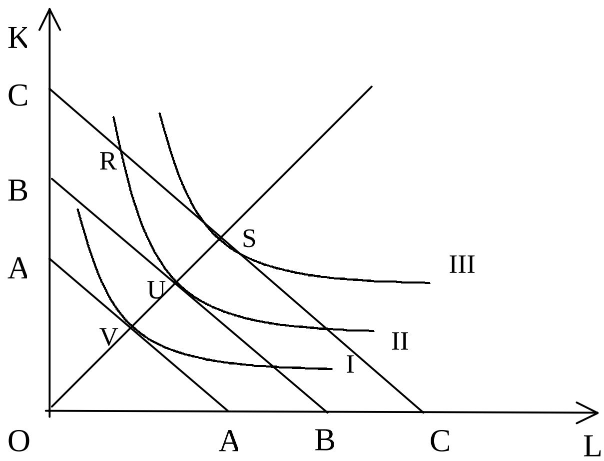
$$Q = f(L, K) \tag{1}$$

$$C = wL + rK \tag{2}$$

$$g(L, K) = 0 \tag{3}$$

donde la primera ecuación es la función de producción (q es el producto y L y K son los factores productivos), la segunda ecuación es la función directa de costos y la tercera es una función implícita que expresa la combinación de factores de costo mínimo[3]. En el Gráfico 1, en el plano de insumos se representan, por un lado, el mapa de isocuantas y, por el otro lado, dados los precios de los factores, se representan los isocostos por medio de las rectas AA, BB, CC, etc. Cada punto en el plano representa un nivel de costo y un nivel de producción; por ejemplo, el punto R representa el nivel de producción II que se obtiene con el costo representado por CC; es evidente que no todos los puntos del plano que son accesibles son eficientes. Por ejemplo, a partir de R el empresario puede moverse a lo largo de la isocosto CC reemplazando K por L hasta llegar al punto S en el que se obtiene el costo mínimo para el nivel de producción III; en caso de continuar la sustitución de K por L a lo largo de la isocosto se llegaría al punto M donde nuevamente se obtiene el nivel de producción II. El ajuste a partir de R se puede explicar en forma diferente: si el empresario desea obtener el nivel de producción II, sustituirá K por L moviéndose a lo largo de la isocuanta hasta tocar el punto U.

Gráfico 1



[2] Revisión y actualización de la Nota de Clase de Alberto Porto, "Rendimientos a Escala y Costos", Cuadernos, Nº 34, UNLP, La Plata, Julio de 1980. Se agradece la colaboración de Josefina Posadas.

[3] La función implícita que expresa la combinación de factores de costo mínimo (trayectoria de expansión) puede obtenerse analíticamente en distintas formas: minimizando el costo de obtener un nivel dado de producción, maximizando el nivel de producción para un costo dado o maximizando el beneficio.

La explicación anterior demuestra que el empresario maximizador solo seleccionará puntos sobre el sendero de expansión OVUS; el resto de los puntos son factibles pero ineficientes. Las curvas de costo suponen eficiencia en la producción; por esta razón, en el sistema inicial de ecuaciones se incluyó la expresión para la trayectoria de expansión. La curva de costos indica el costo mínimo para cada nivel de producción a lo largo de la trayectoria de expansión.

Se indagará ahora el comportamiento de los costos ante una expansión a escala. Se supondrá que la función de producción (1) es homogénea de grado h. Supóngase que en las funciones (1) y (2) se selecciona la proporción de factores que resulta de (3). Si se registra una expansión a escala -se modifican en forma proporcional todos los factores- se tendrá, a partir de (1)

$$dQ = f_L dL + f_K dK$$

donde f_L y f_K son, respectivamente, las productividades marginales de *L* y *K*. Completando tasas de cambio se obtiene

$$\frac{dQ}{Q} = \frac{f_L L}{Q}\frac{dL}{L} + \frac{f_K K}{Q}\frac{dK}{K} \qquad (4)$$

Como se trata de una expansión proporcional de los dos insumos se tiene que

$$\frac{dL}{L} = \frac{dK}{K} = \frac{d\lambda}{\lambda} \qquad (5)$$

Reemplazando en (4) es

$$\frac{dQ}{Q} = \left(\frac{f_L L + f_K K}{Q}\right)\frac{d\lambda}{\lambda} \qquad (6)$$

Como la función (1) se supuso homogénea de grado h, se cumple el teorema de Euler,

$$f_L L + f_K K = hQ$$

de modo que reemplazando en (6) es

$$\frac{dQ}{Q} = h\frac{d\lambda}{\lambda} \qquad (7)$$

de donde se obtiene

$$\varepsilon = \frac{\frac{dQ}{Q}}{\frac{d\lambda}{\lambda}} = h \qquad (8)$$

siendo ε la elasticidad de productividad definida como el cambio porcentual en la producción ante un cambio porcentual igual de todos los insumos, o sea, sin alterar las proporciones de los factores. En el caso de funciones homogéneas la elasticidad de productividad es igual al grado de homogeneidad de la función.

Hallando el diferencial de (2), completando tasas de cambio y reordenando se obtiene

$$\frac{dC}{C} = y_w \frac{dL}{L} + (1 - y_w)\frac{dK}{K} \qquad (9)$$

donde $y_w = \frac{wL}{C}$, es la participación relativa del trabajo en el costo total.

Utilizando (5), (9) se transforma en

$$\frac{dC}{C} = \frac{d\lambda}{\lambda} \qquad (10)$$

La expresión (7) indica como varía porcentualmente el producto total ante cambios proporcionales iguales en todos los factores; la expresión (10) indica como varía porcentualmente el costo total. Relacionando (9) y (10) es

$$\kappa = \frac{\frac{dC}{C}}{\frac{dQ}{Q}} = \frac{1}{h} = \frac{1}{\varepsilon} \qquad (11)$$

o sea, la elasticidad de la función de costo total (κ) es igual a la inversa de la elasticidad de productividad.

La expresión (8) -la elasticidad de productividad- permite definir los rendimientos a escala:

(i) Si $\varepsilon > 1$, los rendimientos a escala son crecientes, o sea, ante una expansión proporcional igual en todos los insumos, el producto se incrementa en una proporción mayor.

(ii) Si $\varepsilon = 1$, los rendimientos a escala son constantes, o sea, ante una expansión proporcional igual en todos los insumos, el producto se incrementa en la misma proporción.

(iii) Si $\varepsilon < 1$, los rendimientos a escala son decrecientes, o sea, ante una expansión proporcional igual en todos los insumos, el producto se incrementa en una proporción menor.

De la expresión (11) surge que en el primer caso ($\varepsilon > 1$) la elasticidad del costo total es menor que la unidad; en el segundo caso ($\varepsilon = 1$) es igual a la unidad y en el tercero ($\varepsilon < 1$) es mayor que la unidad. Por ejemplo, si los dos factores se expanden en la misma proporción, el costo total aumentará en esa misma proporción -expresión (10); lo que ocurra con el producto total depende del valor de la elasticidad de productividad: así, si $\varepsilon > 1$ el producto crece en una proporción mayor; por consiguiente, en este caso, el cociente entre el incremento porcentual en el costo total y el incremento porcentual en el producto total -o sea, la elasticidad del costo total- es menor que la unidad. Explicaciones similares pueden darse para valores de la elasticidad del costo total mayores o iguales a la unidad.

Si $\varepsilon = h = 1$, o sea, los rendimientos a escala son constantes, se verifica que

$$\frac{d\lambda}{\lambda} = \frac{dC}{C} = \frac{dQ}{Q}$$

de modo que el costo medio permanece constante.

Si $\varepsilon = h > 1$, o sea los rendimientos a escala son crecientes, se verifica que

$$\frac{d\lambda}{\lambda} = \frac{dC}{C} < \frac{dQ}{Q}$$

de modo que el costo medio es decreciente.

Finalmente, si $\varepsilon = h < 1$, o sea los rendimientos a escala son decrecientes, se verifica que

$$\frac{d\lambda}{\lambda} = \frac{dC}{C} > \frac{dQ}{Q}$$

de modo que el costo medio es creciente.

Estos resultados pueden obtenerse hallando la elasticidad de la función de costo medio

$$\kappa_{CMe} = \frac{d\left[\frac{C}{Q}\right]}{dQ} \frac{Q}{\frac{C}{Q}} = \frac{dC}{dQ}\frac{Q}{C} - 1 = \kappa - 1$$

La elasticidad del costo medio es igual a la elasticidad de la función de costo total menos la unidad.

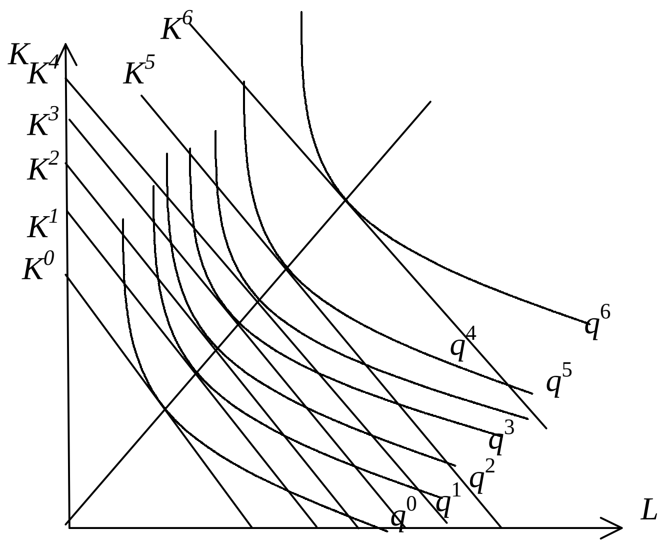
Si $\kappa = 1$ (rendimientos constantes a escala), $\kappa_{CMe} = 0$ y el costo medio permanece constante; si $\kappa > 1$ (rendimientos decrecientes a escala), $\kappa_{CMe} > 0$ y el costo medio es creciente; finalmente si $\kappa < 1$ (rendimientos crecientes a escala), $\kappa_{CMe} < 0$ y el costo medio es decreciente.

Como expresa Allen (1966), “una aplicación menos admitida generalmente, pero extraordinariamente útil, del concepto de elasticidad, se halla en el análisis del problema de costo... Esta aplicación presenta un notable contraste con la elasticidad de la demanda. La última se refiere a la cantidad media (ingreso medio) y nos permite determinar, comparando su valor con la unidad, si la correspondiente cantidad total (ingreso total) crece o decrece. La situación es completamente distinta en el problema del costo. Aquí la cantidad total (costo total) crece para todos los valores de la cantidad producida y su elasticidad se define y utiliza para deducir las propiedades de la cantidad media (costo medio).” (pág. 255)

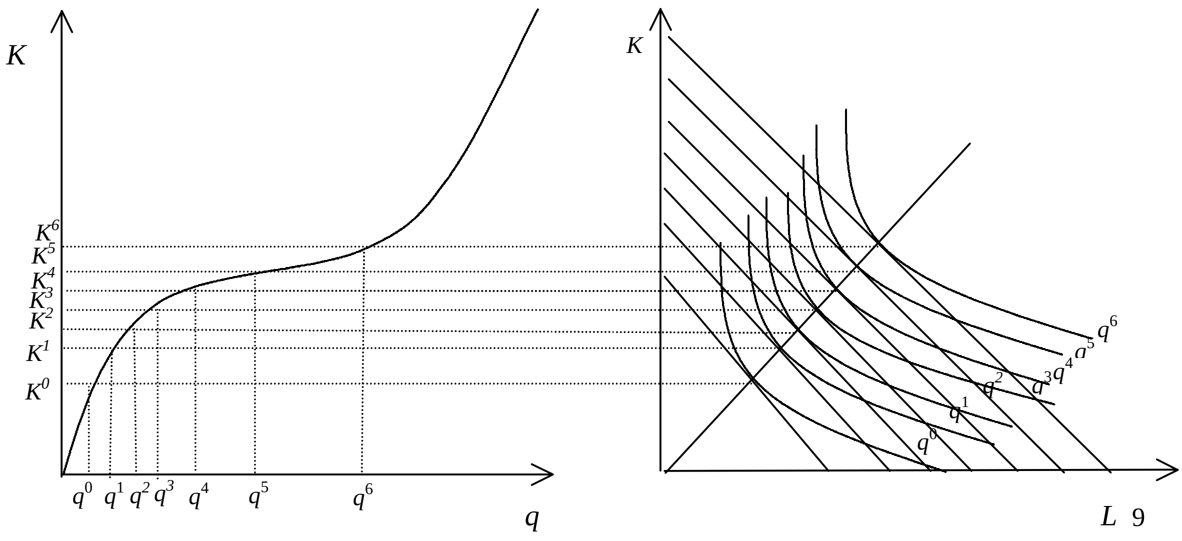
1.1. REPRESENTACIÓN GRÁFICA

Si la función de producción es de rendimientos crecientes (decrecientes) a escala, las isocuantas que representan aumentos absolutos iguales en la cantidad de producto estarán cada vez más próximas (alejadas) unas a otras. En el gráfico 2 hay rendimientos

Gráfico 2
crecientes entre q^0 y q^4 y luego rendimientos decrecientes.



Si el precio de los factores está dado y el precio del capital es $r = 1$, el costo total de obtener los niveles de producción en términos de K es igual a K^0, K^1, ..., K^6. Si se relaciona el gráfico en el plano de insumos con el del costo en función del nivel de producto, se obtiene



1.2. PROBLEMAS

Problema Nº1

Dada la función de producción Cobb-Douglas

$$q = AL^{\alpha} K^{\beta} \qquad (1)$$

(i) Demostrar que la función indirecta de costos es

$$C^*(w,r,q) = \frac{Jr}{A}^{\beta/\alpha+\beta} . w^{\alpha/\alpha+\beta} . q^{1/\alpha+\beta} \qquad (2)$$

donde $J = \left[\left(\frac{1}{\alpha}\right)^{\alpha}\left(\frac{1}{\beta}\right)^{\beta}(\alpha+\beta)^{\alpha+\beta}\right]^{1/\alpha+\beta} > 0$

(ii) Analizar los rendimientos a escala utilizando las elasticidades de productividad, del costo total y del costo medio.

Problema Nº2

A partir de la función de producción de tipo Leontieff

$$q = min\left\{\frac{L}{u}, \frac{K}{v}\right\}$$

obtener la función indirecta de costos

$$C^*(w,r,q) = (uw + vr)q$$

Problema Nº3

Obtener las funciones de costos correspondientes a las siguientes funciones de producción de tipo Leontieff

$$q = min\left\{\left(\frac{L}{u}\right)^{2}, \left(\frac{K}{v}\right)^{2}\right\}$$

$$q = min\left\{\left(\frac{L}{u}\right)^{1/2}, \left(\frac{K}{v}\right)^{1/2}\right\}$$

Analizar los rendimientos a escala.

NOTA SOBRE LA ELASTICIDAD DE SUSTITUCIÓN ENTRE FACTORES

2. NOTA SOBRE LA ELASTICIDAD DE SUSTITUCIÓN ENTRE FACTORES[4]

2.1. DEFINICIÓN[5]

La elasticidad de sustitución entre factores fue introducida en la teoría económica por J.R. Hicks (1964) para medir la mayor o menor intensidad de decrecimiento de la tasa marginal de sustitución al variar la combinación de factores a lo largo de una isocuanta. Sean K y L (capital y trabajo, respectivamente) dos factores productivos. A partir de un punto $\left(K^0, L^0\right)$sobre una isocuanta, d(K/L) representa la variación en el uso del factor K en relación al factor L (o sea, la variación del capital por trabajador), y $d\left(-dK/dL\right) = d(f_L / f_K)$ la correspondiente variación en la tasa marginal de sustitución (o sea, la variación del cociente de las productividades marginales). La razón de estos diferenciales, expresada en términos porcentuales —para hacerla independiente de las unidades de medida—, se define como la elasticidad de sustitución entre los factores. Formalmente,

$$\sigma = \frac{\dfrac{d\left(\dfrac{K}{L}\right)}{\left(\dfrac{K}{L}\right)}}{\dfrac{d\left(\dfrac{f_L}{f_K}\right)}{\left(\dfrac{f_L}{f_K}\right)}} = \frac{d\ln\left(\dfrac{K}{L}\right)}{d\ln\left(\dfrac{f_L}{f_K}\right)} \qquad (1)$$

2.2. OBTENCIÓN MATEMÁTICA

2.2.1 Caso general

Sea la función de producción con dos factores productivos

$$q = f(K, L) \qquad (2)$$

La ecuación de una isocuanta viene dada por

$$q^0 = f(K, L) \qquad (3)$$

que indica las combinaciones de K y L que permiten obtener el nivel de producción q^0. Hallando el diferencial total de (3) se obtiene

---

[4] Revisión y actualización de la “Nota sobre la elasticidad de sustitución entre factores”, A. Porto, Cuadernos, Nª 34, UNLP, La Plata, Julio de 1980. Se agradece la colaboración de Josefina Posadas.

[5] R.G.D. Allen (1966), pág.334 a 337.

$$dq^0 = 0 = f_K dK + f_L dL$$

$$-\frac{dK}{dL} = \frac{f_L}{f_K} \qquad (4)$$

La expresión (4) se define como la tasa marginal de sustitución entre factores. Indica la cantidad del factor K que se puede liberar del proceso de producción al agregarse una unidad adicional de L de modo de mantener inalterado el nivel de producción.

Derivando (4) con respecto a L, se obtiene la variación de la pendiente de la isocuanta,

$$\frac{d^2K}{dL^2} = \frac{d\left(-\frac{f_L}{f_K}\right)}{dL} = -\frac{1}{f_K{}^2}\left[f_{LL}\, f_K + f_{LK}\, f_K \frac{dK}{dL} - f_L\, f_{KL} - f_L\, f_{KK} \frac{dK}{dL}\right]$$

que utilizando (4) y reordenando puede expresarse,

$$\frac{d^2K}{dL^2} = \frac{1}{f_K{}^3}\left[2\, f_{LK}\, f_L\, f_K - f_{LL}\, f_K{}^2 - f_{KK}\, f_L{}^2\right] \qquad (5)$$

La ecuación de una isocuanta viene dada por la expresión (3). En el caso normal, la pendiente es negativa ya que ambas productividades marginales son positivas (expresión (4)) y la isocuanta es convexa al origen (función de producción cuasi-cóncava) indicando que la tasa marginal de sustitución entre factores es decreciente (la expresión (5) es positiva).

A partir de una combinación dada de los factores $\left(K^0, L^0\right)$ puede obtenerse la variación en el uso del factor K en relación al factor L,

$$d\left(\frac{K}{L}\right) = \frac{dK.L - dL.K}{L^2}$$

y completando tasas de cambio,

$$\frac{d\left(\frac{K}{L}\right)}{\frac{K}{L}} = \frac{dK}{K} - \frac{dL}{L} \qquad (6)$$

Del mismo modo puede obtenerse la correspondiente variación en la tasa marginal de sustitución,

$$d\left(\frac{f_L}{f_K}\right) = \frac{df_L\, f_K - df_K\, f_L}{f_K{}^2}$$

y completando tasas de cambio

$$\frac{d\left(\frac{f_L}{f_K}\right)}{\frac{f_L}{f_K}} = \frac{df_L}{f_L} - \frac{df_K}{f_K} \tag{7}$$

Reemplazando (6) y (7) en (1) se obtiene,

$$\sigma = \frac{\frac{dK}{K} - \frac{dL}{L}}{\frac{df_L}{f_L} - \frac{df_K}{f_K}} \tag{8}$$

donde los diferenciales corresponden a una variación a lo largo de una isocuanta.

Las variaciones de las productividades marginales vienen dadas por,

$$df_K = f_{KK}\,dK + f_{KL}\,dL \tag{9}$$

$$df_L = f_{LK}\,dK + f_{LL}\,dL \tag{10}$$

Por tratarse de una variación a lo largo de una isocuanta, dK y dL no son independientes sino que deben cumplir con (4) de modo de mantener el nivel de producción inalterado. A partir de (4) se obtiene,

$$dK = -\frac{f_L}{f_K}\,dL \tag{11}$$

$$\frac{dK}{K} = -\frac{f_L}{f_K}\frac{L}{K}\frac{dL}{L} \tag{12}$$

Remplazando (9) a (12) en (8) y reordenando se obtiene la expresión para la elasticidad de sustitución entre factores en función de las derivadas parciales —primeras y segundas— de la función de producción,

$$\sigma = \frac{f_K\,f_L\left(f_L L + f_K K\right)}{KL\left(2\,f_{LK}\,f_K\,f_L - f_{LL}\,f_K{}^2 - f_{KK}\,f_L{}^2\right)} \tag{13}$$

2.2.2. Propiedades de las funciones homogéneas de grado uno[6]

Si la función (2) es homogénea de grado uno (rendimientos constantes a escala) se verifica que

$$f\left(tK,tL\right)=tf\left(K,L\right)=tq \qquad\qquad t>0$$

o sea, incrementando todos los factores en una proporción t, el producto crecerá en esa misma proporción. Como t es una constante arbitraria, haciendo $t=1/L$ se obtiene

$$\frac{q}{L}=f\left(\frac{K}{L},1\right)=g\left(\rho\right) \qquad\qquad \rho=\frac{K}{L} \qquad (14)$$

Siendo,

$$q=Lg\left(\rho\right) \qquad (15)$$

se obtienen,

$$f_L=g+g'\left(-\frac{K}{L^2}\right)L=g-g'\rho \qquad (16)$$

$$f_K=Lg'\frac{1}{L}=g' \qquad (17)$$

$$f_{KL}=g''\left(-\frac{K}{L^2}\right) \qquad (18)$$

$$f_{LL}=g''\left(\frac{K}{L^2}\right)\rho \qquad (19)$$

[6] Ver R.G.D. Allen (1966), p.307-314.Las propiedades de las funciones homogéneas de grado uno, que interesa destacar, son: (i) el producto por trabajador puede expresarse en función de una sola variable, el capital por trabajador, (expresión (14)); (ii) las productividades marginales de los factores $\left(f_K, f_L\right)$ dependen sólo del capital por trabajador, o sea, son homogéneas de grado cero con respecto a las variables *K* y *L* (expresiones (16) y (17)); (iii) se cumple el teorema de Euler (expresión (21)); (iv) las derivadas parciales segundas directas se pueden expresar en función de la derivada segunda cruzada (expresiones (22) y (23)).

$$f_{KK} = g''\frac{1}{L} \quad (20)$$

donde

$g' > 0;$

$g - g'\rho > 0;$

$g'' < 0$

o sea, las productividades marginales son positivas y decrecientes.

Utilizando (16) y (17) se verifica el cumplimiento del teorema de Euler.

$$f_L L + f_K K = q \quad (21)$$

A partir de (18) a (20) se obtienen las siguientes relaciones entre las derivadas parciales segundas, directas y cruzadas,

$$f_{KK} = -\frac{L}{K} f_{KL} \quad (22)$$

$$f_{LL} = -\frac{K}{L} f_{KL} \quad (23)$$

2.2.3. Caso particular de funciones homogéneas de grado uno

Reemplazando (22) y (23) en (13) y reordenando, se obtiene,

$$\sigma = \frac{f_K f_L (f_L L + f_K K)}{f_{KL}\left(2 f_K f_L KL + f_K{}^2 K^2 + f_L{}^2 L^2\right)} \quad (24)$$

De la expresión (21) surge que el paréntesis del numerador es igual a q y el denominador es igual a q^2; reemplazando se obtiene la expresión de la elasticidad de sustitución, válida para funciones homogéneas de grado uno.[7]

$$\sigma = \frac{f_K f_L}{f_{KL} q} \quad (25)$$

ó

$$\sigma = \frac{-g'(g - \rho g')}{g'' \rho g} \quad (26)$$

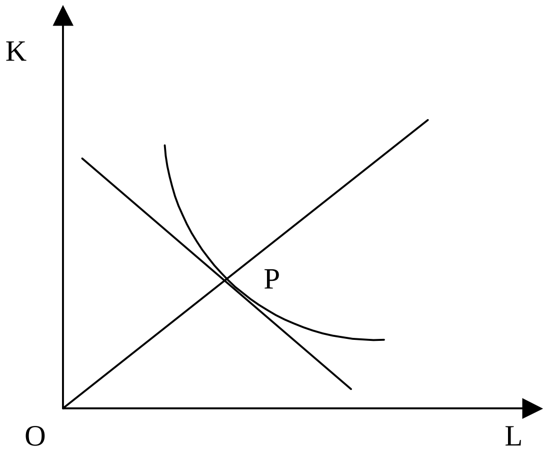
[7] En H.L.Dieguez y A. Porto (1972), pág. 16-18, se obtiene a partir de (13) una expresión válida para funciones homogéneas de cualquier grado.

2.3. REPRESENTACIÓN GRÁFICA

2.3.1. Representación gráfica en el plano de insumos

En el gráfico 1, la combinación de factores K/L viene dada por la pendiente de OP. La tasa marginal de sustitución por la pendiente de la tangente a la isocuanta en el punto P. La elasticidad de sustitución puede visualizarse gráficamente como la razón entre la variación porcentual de la pendiente de OP y la variación porcentual de la pendiente de la tangente a la isocuanta en el punto P, cuando el punto P se mueve a lo largo de la isocuanta.

Gráfico 1



2.3.2. Representación en el plano tasa marginal de sustitución - utilización media de factores

Utilizando (16) y (17) se obtiene la tasa marginal de sustitución entre factores,

$$\frac{f_K}{f_L} = \frac{g'}{g - \rho g'} \qquad (27)$$

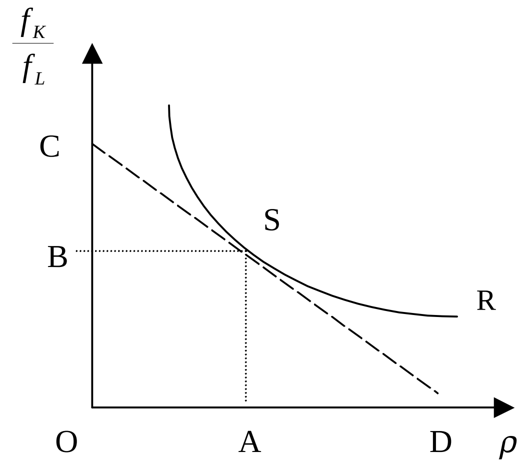
Derivando con respecto a ρ

$$\frac{d\left(\frac{f_K}{f_L}\right)}{d\rho} = \frac{g'' g}{(g - \rho g')^2} < 0 \qquad (28)$$

o sea, ante un aumento en la cantidad de capital por trabajador, la productividad marginal del capital relativa a la del trabajo disminuye. Para una función dada de producción, la relación entre f_K / f_L y ρ se representa con una curva como R del gráfico 2.

La elasticidad de la curva R es la elasticidad de sustitución; la elasticidad en un punto puede representarse gráficamente en forma similar a la elasticidad de la demanda por un bien.

Gráfico 2



$$\frac{d\rho}{d(\frac{f_K}{f_L})} = \frac{AD}{AS} = \frac{AD}{OB} = \frac{BS}{BC}$$

$$\rho = OA = BS$$

$$\frac{f_K}{f_L} = OB = AS$$

$$\sigma = \frac{d\rho}{d(\frac{f_K}{f_L})} \cdot \frac{\frac{f_K}{f_L}}{\rho} = \frac{AD}{AS} \cdot \frac{AS}{OA} = \frac{AD}{OA}$$

ó

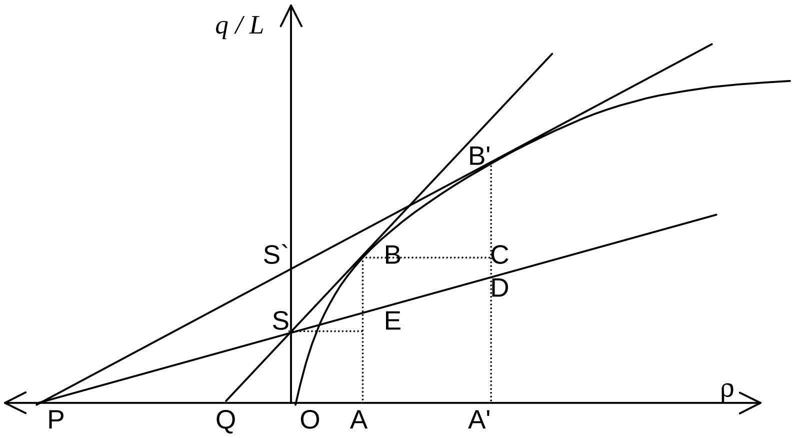
$$\sigma = \frac{BS}{BC} \cdot \frac{OB}{BS} = \frac{OB}{BC}$$

2.3.3. Representación en el plano de producto por trabajador – capital por trabajador[8]

La relación entre el producto por trabajador y el capital por trabajador - dada por la expresión (14) - puede representarse como se indica en el gráfico 3.

[8] Esta representación gráfica fue tomada de F.S.T. Hsiao (1969).

Gráfico 3



Si rigen condiciones competitivas será, en el punto de equilibrio B,

$$r = g' \qquad \left(= \frac{EB}{SE} = \frac{OS}{OQ} \right) \tag{29}$$

$$w = g - \rho g' \ \left(= AB - OA \cdot \frac{EB}{SE} = OS \right) \tag{30}$$

donde w y r son las remuneraciones unitarias del trabajo y el capital, respectivamente, en términos el bien q; el precio relativo de los factores es

$$\frac{w}{r} = \frac{g - \rho g'}{g'} \ (= OQ) \tag{31}$$

Si cambia w, derivando (14) y (30) resultan,

$$\frac{\partial \left(\frac{q}{L} \right)}{\partial w} = g' \frac{\partial \rho}{\partial w}$$
(32)

$$1 = -\rho g'' \frac{\partial \rho}{\partial w} \tag{33}$$

de donde se obtiene, reemplazando y completando elasticidad,

$$\frac{\partial\left(\frac{q}{L}\right)}{\partial w}\cdot\frac{w}{\frac{q}{L}}=-\frac{g'(g-\rho g')}{g\rho g''} \tag{34}$$

que es igual a (26), o sea, la elasticidad de sustitución. En el gráfico 3, a partir del punto inicial dado por el precio relativo de los factores OQ se tiene que

$$\frac{\partial\left(\frac{q}{L}\right)}{\frac{q}{L}}=\frac{CB'}{A'C}=\frac{A'B'}{A'C}-1$$

$$\frac{\partial w}{w}=\frac{SS'}{OS}=\frac{DB'}{A'D}=\frac{A'B'}{A'D}-1$$

$$\sigma=\frac{\frac{A'B'}{A'C}-1}{\frac{A'B'}{A'D}-1}$$

y σ será mayor, menor o igual a 1 según A'D sea mayor, menor o igual a A'C.

En este caso no sólo queda representada la elasticidad de sustitución en el plano de producto por trabajador-capital por trabajador, sino que puede visualizarse fácilmente si la elasticidad de sustitución es mayor, igual o menor que la unidad.

2.4. APLICACIONES

2.4.1. Participaciones relativas de los factores en el ingreso

La participación relativa de los factores en el ingreso se define con la expresión

$$\alpha=\frac{rK}{wL} \tag{35}$$

Hallando el diferencial total se obtiene,

$$d\alpha=\frac{(drK+rdK)wL-(dwL+dLw)rK}{(wL)^2}$$

y completando tasas de cambio y reordenando

$$\frac{d\alpha}{\alpha}=\left(\frac{dK}{K}-\frac{dL}{L}\right)-\left(\frac{dw}{w}-\frac{dr}{r}\right) \tag{36}$$

Bajo condiciones competitivas la remuneración unitaria de cada factor es igual a su productividad marginal [ver expresiones (29) y (30)]; reemplazando (8) en (36) y reordenando se obtiene,

$$\frac{d\alpha}{\alpha} = \left(1 - \frac{1}{\sigma}\right)\left(\frac{dK}{K} - \frac{dL}{L}\right) \tag{37}$$

Ante una expansión en la dotación de factores, la participación relativa de los factores queda inalterada: (i) si ambos factores se expanden a la misma tasa; y/o (ii) si la elasticidad de sustitución es igual a la unidad.

Si un factor se expande a una tasa superior a la del otro factor (por ej. $\frac{dK}{K} > \frac{dL}{L}$) su participación relativa aumentará (disminuirá) si la elasticidad de sustitución es superior (inferior) a la unidad.[9]

2.4.2. La elasticidad de sustitución como determinante de la elasticidad de la demanda de un factor

En esta sección se analizará la elasticidad de sustitución como determinante de la demanda derivada por un factor de producción. Para aislar el efecto de la elasticidad de sustitución se trabajará con un caso sencillo que consiste en indagar como se modifica la demanda derivada de un factor (por ejemplo L) cuando su precio varía exógenamente permaneciendo constante la cantidad producida y el precio del otro factor. Si se desea alcanzar el nivel de producción q_o al mínimo costo, siendo la unidad de producción receptora de precios en los mercados de factores, el problema consiste en minimizar

$$C = wL + rK$$

sujeta a la restricción

$$q^0 = f(L, K)$$

Formando la función de Lagrange y derivando con respecto a L, K λ se obtienen las condiciones de primer orden,

$$w - \lambda . f_L = 0$$

[9] En el punto 3.2. se representó la elasticidad de sustitución como la elasticidad de la curva R en el diagrama tasa marginal de sustitución $\left(\frac{f_K}{f_L}\right)$ —utilización media de factores $\left(\frac{K}{L}\right)$. Si la elasticidad de sustitución es mayor (menor) que la unidad, un incremento del empleo de *K* en relación a *L*, incrementa (disminuye) el área bajo la curva que mide la participación relativa, $\frac{f_K}{f_L} \cdot \frac{K}{L} = \frac{r}{w} \cdot \frac{K}{L}$; el área bajo la curva queda inalterada si $\sigma = 1$ y/o si *K* y *L* se expanden en la misma proporción.

$$r - \lambda . f_K = 0$$
$$q_O - f(L, K) = 0 \tag{38}$$

siendo la condición de segundo orden

$$\begin{vmatrix} -\lambda . f_{LL} & -\lambda . f_{LK} & -f_L \\ -\lambda . f_{KL} & -\lambda . f_{KK} & -f_K \\ -f_L & -f_K & 0 \end{vmatrix} < 0 \tag{39}$$

que se cumple si la curva de indiferencia es convexa hacia el origen de coordenadas (ver expresión (5)).

Si varía w se modifican los valores de L, K, y λ, pero de un modo tal que en el nuevo punto de equilibrio se siguen cumpliendo las condiciones (38).

Derivando con respecto a w y resolviendo para L, se obtiene

$$\frac{\partial L}{\partial w} = -\frac{f_L f_K{}^2}{(2 f_{LK} f_L f_K - f_{LL} f_K{}^2 - f_{KK} f_L{}^2) w} \tag{40}$$

reemplazando (13) en (40) y completando la elasticidad

$$\lambda_L = -\frac{\partial L}{\partial w} \frac{w}{L} = (1 - y_w)\sigma \tag{41}$$

siendo y_w la participación del factor L en el costo total.[10] De la expresión (41) surge que la demanda por un factor será más elástica cuanto mayor sea la elasticidad de sustitución entre factores $\left(\frac{\partial L}{\partial \sigma} > 0 \right)$.

En el gráfico 4 las isocuantas A y B, representativas del nivel de producción q^0, corresponden a dos tecnologías con diferente elasticidad de sustitución (mayor en B que en A). Si la pendiente de CD representa el precio relativo de los factores, el punto inicial de equilibrio en ambas tecnologías será P y la utilización media de factores vendrá dada

---

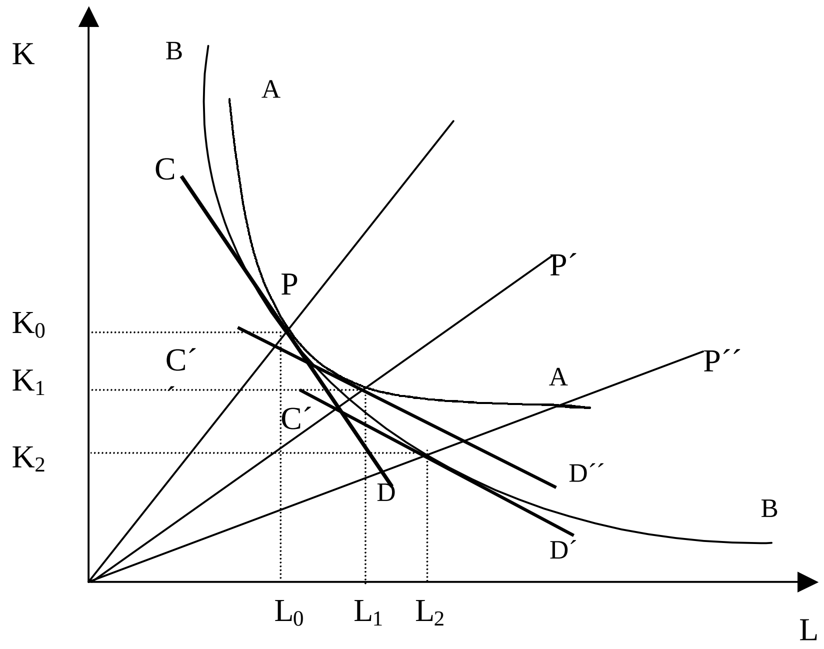
[10] La solución mas general (bajo condiciones competitivas) para la elasticidad de la demanda derivada, en el caso de dos factores, es la dada por Hicks (1964),

$$\lambda_L = \frac{\sigma(\eta + \varepsilon) + y_w \varepsilon(\eta - \sigma)}{\varepsilon + \eta - y_w(\eta - \sigma)}$$

donde ε, η, y_w son, respectivamente, la elasticidad de oferta del factor cooperante (en el caso normal positiva), la elasticidad de la demanda por el producto (definida positiva) y la participación del factor *L* en el costo total. El caso del texto, en el que tanto *r* como *q* permanecen constantes, puede obtenerse a partir de la expresión de Hicks considerando elasticidad infinita para la oferta del factor cooperante y demanda perfectamente inelástica para el producto. Extrayendo factor común ε en el numerador y denominador de la expresión de Hicks y hallando el límite cuando $\varepsilon \to \infty$ se obtiene $\lambda_L = y_w \eta + (1 - y_w)\sigma$ que es el caso analizado por Allen. Si, además, $\eta = 0$, entonces $\lambda_L = (1 - y_w).\sigma$ que es el caso del texto.

por la pendiente de OP; en ambas tecnologías se ocuparán L_o trabajadores y K_o capital. Si r aumenta , el precio relativo de los factores vendrá dado por la pendiente de C'D' ó C"D"; el mismo nivel de producción se obtiene en ambas tecnologías utilizando más del factor más barato y menos del factor más caro; pero la sustitución será mayor en la tecnología con mayor elasticidad de sustitución (en este caso B). Puede observarse en el gráfico que ante el mismo incremento porcentual en r, la disminución porcentual en K es mayor en el caso de la tecnología con mayor elasticidad de sustitución ($\frac{K_oK_2}{OK_o}$ en B versus $\frac{K_oK_1}{OK_0}$ en A).

Gráfico 4



2.5. Problemas

Problema Nº1

Reemplazando (5) en (13) se obtiene

$$\sigma = \frac{f_L \cdot (f_L \cdot L + f_K \cdot K)}{K \cdot L \cdot f_K{}^2 \cdot \dfrac{d^2K}{dL^2}} \tag{42}$$

De la expresión (42) resulta que el valor de σ depende de la curvatura de la isocuanta ($\frac{d^2K}{dL^2}$). Si $\frac{d^2K}{dL^2} = 0$, $\sigma \to \infty$ y la función de producción es lineal. Si $\frac{d^2K}{dL^2} \to \infty, \sigma \to 0$ y la función de producción es del tipo Leontief.

Hallar expresiones explícitas para los dos tipos de funciones de producción (lineal y Leontief) y representar gráficamente.

Problema Nº2

Hallar el valor de la elasticidad de sustitución para la función Cobb-Douglas.
$q = AL^{\alpha} \cdot K^{1-\alpha}$

Problema Nº3

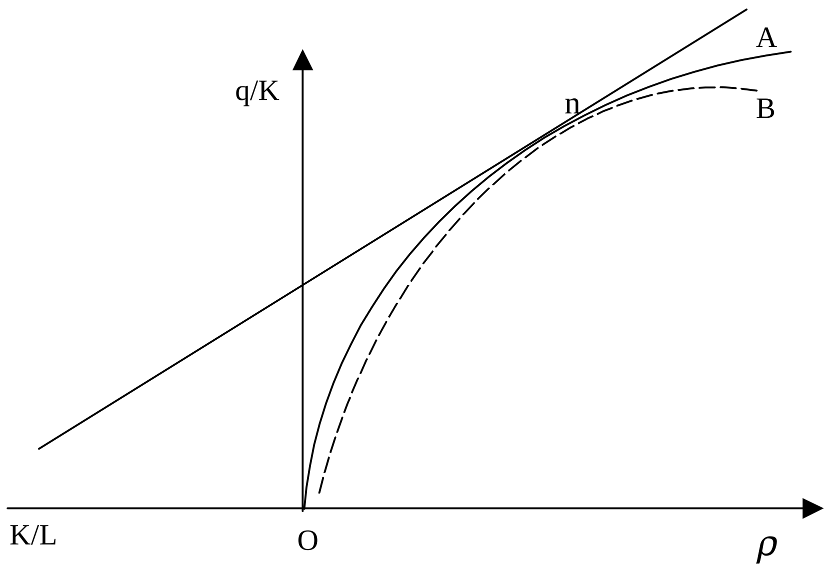
Hallar el valor de la elasticidad de sustitución para la función de producción CES

$$q = \left[a \cdot L^{\rho} + b \cdot K^{\rho}\right]^{\frac{1}{\rho}} \qquad 1 \geq \rho \geq -\infty$$

Analizar los casos especiales de $\rho = 1; \rho = 0; \rho = -\infty.$

Problema Nº4

Dadas las funciones de producción de rendimientos constantes a escala A y B, que son tangentes en el punto n, determinar en cuál es mayor la elasticidad de sustitución.



Problema Nº5

A partir de las expresiones (40) y (41) representar una isocuanta y la correspondiente función de demanda por el factor L para los casos de $\sigma = 0; \sigma = \infty; 0 < \sigma < \infty.$

NOTA SOBRE DUALIDAD EN LA PRODUCCION, TECNOLOGIA Y COSTOS: LA ISOCUANTA Y EL ISOCOSTO

3. NOTA SOBRE DUALIDAD EN LA PRODUCCIÓN TECNOLOGÍA Y COSTOS: LA ISOCUANTA Y EL ISOCOSTO

3.1. DUALIDAD

El término dualidad se aplica usualmente a pares de problemas que son formalmente similares excepto que se ha cambiado el rol de las cantidades y de los precios, y/o que un problema de maximización se ha cambiado a otro de minimización, y/o que se han cambiado la función objetivo y la restricción.[11]

La dualidad está relacionada con la optimización: si se define un problema de optimización en términos de cantidades, hay un correspondiente problema definido en términos de precios que tiene el mismo valor.[12] La dualidad permite elegir, en base a la conveniencia, el trabajar con uno u otro enfoque. La conveniencia puede resultar de la facilidad del trabajo analítico y/o de la posibilidad de estimación.[13]

Una de las aplicaciones de la dualidad es la relación entre la función de producción y la función de costos de una firma. El principio fundamental de la dualidad en la producción es que la función de costos de la firma reúne toda la información económicamente relevante de la tecnología. En esta nota se extienden algunos de los resultados disponibles sobre el tema.

3.2. CARACTERÍSTICAS DE LA FUNCIÓN DE PRODUCCIÓN

Hay cuatro características de la función de producción que son relevantes para el análisis económico (Brown, 1966). Dos se refieren a la relación entre las cantidades de factores y la cantidad (máxima) de producto; las otras dos se refieren a relaciones entre los factores, para un nivel dado de producción.

3.2.1. Relaciones factores-producto: eficiencia de la tecnología y rendimientos a escala

Las dos características que van de factores a producto son la eficiencia de la tecnología y los rendimientos a escala. La eficiencia es una escala de transformación de los factores en cantidad de producto: dadas dos tecnologías, A y B, es más eficiente tecnológicamente la que con la misma cantidad de factores permite obtener la mayor cantidad del producto. Los rendimientos a escala relacionan la variación porcentual igual en todos los factores con la variación porcentual resultante en el producto. Sea una función Cobb-Douglas del tipo

$$q = f(L, K) = AL^{\alpha}K^{\beta}$$

donde q es el producto, L y K los factores trabajo y capital y A,α, β parámetros tecnológicos. A es el parámetro que representa la eficiencia de la tecnología; $\alpha + \beta$, que es igual a la elasticidad de productividad (ε), representa los rendimientos a escala. Si se utiliza el dual, o sea, la función de costos, el parámetro A aparece dividiendo –a mayor eficiencia tecnológica, menor costo

[11] Mas Colell, Whinston y Green (1995), pág. 58 y pág. 63 y siguientes.
[12] Luenberger (1995), pág. 8.
[13] Varian (1992), pág. 91-93; Jehle (1991), pág. 183.

total- en tanto que los rendimientos a escala se expresan con la elasticidad del costo total (κ), verificándose que

$$\kappa = \frac{1}{\varepsilon}$$

Resumiendo, el parámetro A está en relación directa con el producto total y en relación inversa con el costo total; la elasticidad de productividad total es la inversa de la elasticidad del costo total. Estas relaciones duales corresponden a las dos características de factores a producto de la función de producción.

3.2.2. Relaciones entre factores para un nivel dado de producción: intensidad de uso de factores y elasticidad de sustitución

Las otras dos características se refieren a la relación entre factores para un nivel dado de producción y son la intensidad de uso de factores y la elasticidad de sustitución. La intensidad de uso de factores se refiere a la relación K/L utilizada en el proceso de producción. Si dos tecnologías enfrentan las mismas ofertas de factores (precio relativo de los factores) y en A la relación K/L es mayor, esa tecnología es intensiva en K, comparada con la tecnología B. La elasticidad de sustitución indica la mayor o menor dificultad de sustitución entre factores al moverse a lo largo de una isocuanta. Es la relación entre la variación porcentual en K/L y la variación porcentual en $\frac{f_L}{f_K} = \frac{w}{r}$. Estas dos características pueden estudiarse utilizando la función de producción o, en el dual, la función de costos. En lo que sigue se presentan en forma simple estas relaciones duales.

3.3. Dualidad entre la isocuanta y el isocosto. Determinantes de las curvaturas

Dada la función de producción con un producto (q) y dos factores (L,K)

$$q = f(L, K)$$

la ecuación de una isocuanta viene dada por

$$q^0 = f(L, K) \tag{1}$$

que indica todas las combinaciones de L y K que permiten obtener q^0. La tasa marginal de sustitución entre factores dK/dL indica cuanto de K puede liberarse si se agrega una unidad de L y el nivel de producción se mantiene constante,

$$\frac{dK}{dL} = -\frac{f_L}{f_K} = -\frac{w}{r} \tag{2}$$

donde w y r son los precios de L y K. La igualdad entre la tasa marginal de sustitución y el precio relativo de los factores es la condición de minimización del costo. La variación de la tasa marginal de sustitución viene dada por[14]

$$\frac{d^2K}{dL^2} = \frac{1}{f_k^3}(2f_{LK} f_L f_K - f_{LL} f_K^2 - f_{KK} f_L^2) \qquad (3)$$

que es positiva si la dificultad de sustitución es creciente[15]. f_L, f_K son las derivadas primeras de la función de producción –las productividades marginales- y f_{LL}, f_{KK}, f_{LK} las derivadas segundas, directas y cruzada.

La elasticidad de sustitución entre factores, en términos de las derivadas primeras y segundas de la función de producción, viene dada por

$$\sigma = \frac{\frac{d(K/L)}{(K/L)}}{\frac{d(f_L / f_K)}{(f_L / f_K)}} = \frac{(f_L L + f_K K) f_L f_K}{(2f_{LK} f_L f_k - f_{LL} f_K^2 - f_{KK} f_L^2)LK} \qquad (4)$$

Reemplazando (4) en (3) y reordenando resulta

$$\frac{d^2K}{dL^2} = \frac{y_w}{(1 - y_w)^2} \frac{K}{L^2} \frac{1}{\sigma} \qquad (5)$$

donde $y_w = \frac{wL}{(wL + rK)}$ es la participación del factor L en el costo total. y_w representa la intensidad de uso de trabajo de la tecnología: ceteris paribus, cuanto mayor y_w, más intensiva en trabajo[16].

La expresión (5) da la relación entre la isocuanta y las dos características entre insumos de la función de producción: la isocuanta será más curvada (mayor dificultad de sustitución) cuanto más intensiva en trabajo sea la tecnología y cuanto menor sea la elasticidad de sustitución[17].

La misma información está contenida en la función de costos. Sea

$$C^* = C(w, r, q)$$

La función indirecta de costos. El isocosto para el nivel de producción q es

---

[14]Recordar que como se trata de un movimiento a lo largo de una isocuanta, al modificarse L debe también modificarse K.

[15] Es la condición de convexidad de la isocuanta que en el caso de dos factores es también la condición de cuasi-concavidad de la función de producción

[16] Dado un cierto precio relativo de los factores es más intensiva en trabajo la tecnología con mayor L/K. En esa tecnología será mayor w.L / r.K; utilizando la expresión del costo total C = wL + rK y operando se demuestra que y_w será mayor.

[17] O sea, $\frac{\partial(\frac{d^2K}{dL^2})}{\partial y_w} > 0$ y $\frac{\partial(\frac{d^2K}{dL^2})}{\partial \sigma} < 0$

$$C_0^* = C(w, r, q^0) \qquad (6)$$

siendo la pendiente

$$\frac{dw}{dr} = -\frac{K}{L} \qquad (7)$$

Como expresa Varian (1992, pág. 90) existe una "nice duality": la pendiente de la isocuanta es igual a la razón de precios de los factores (expresión (5)), en tanto que la pendiente del isocosto es igual a la razón entre las cantidades de factores (expresión (7)). Varian demuestra geométricamente que las curvaturas están relacionadas en forma inversa, de modo que si el isocosto es muy curvado la isocuanta lo será muy poco y viceversa. Pero no queda claro el papel de las dos características de la función de producción como determinantes de esas curvaturas, tema que para el isocosto se trata a continuación.

La variación de la pendiente del isocosto es[18]

$$\frac{d^2w}{d^2r} = \frac{d(-\frac{K}{L})}{dr} = \frac{(f_L L + f_K K)^2}{\lambda L^3 (2 f_{LK} f_L f_k - f_{LL} f_K^2 - f_{KK} f_L^2) LK} \qquad (8)$$

donde λ es el multiplicador de Lagrange en la minimización del costo (λ=costo marginal=$\frac{w}{f_L} = \frac{r}{f_K}$). Utilizando (4) y operando se obtiene

$$\frac{d^2w}{d^2r} = \frac{(1 - y_w)}{y_w^2} \frac{w}{r^2} \sigma \qquad (9)$$

El isocosto será menos curvado (más difícil la sustitución) cuanto más intensiva en trabajo la tecnología y cuanto menor sea la elasticidad de sustitución.[19]

De la comparación de (5) y (9) resulta otra interesante dualidad, además del cambio de roles de las cantidades y los precios de los factores: la intensidad de uso de factores y la elasticidad de sustitución juegan en forma inversa en determinar las curvaturas de la isocuanta y el isocosto.

[18] Para obtener la expresión (8) debe tenerse en cuenta que al cambiar el precio de un factor se modifican tanto K como L ya que el producto permanece constante.

[19] O sea, $\frac{\partial(\frac{d^2w}{dr^2})}{\partial y_w} < 0$ y $\frac{\partial(\frac{d^2w}{dr^2})}{\partial \sigma} > 0$

3.4. PROBLEMAS

Problema Nº1

Utilizando la función de producción Cobb-Douglas con rendimientos constantes a escala

$$q = L^{\alpha}K^{1-\alpha}$$

hallar (2), (3), (7) y (9). Hallar $\dfrac{\partial\left[\dfrac{d^2K}{dL^2}\right]}{\partial\alpha}$ e interpretar el significado.

Problema Nº2

Repetir el análisis anterior utilizando la función CES con rendimientos constantes a escala

$$Q = (a_L L^{\rho} + a_K K^{\rho})^{\frac{1}{\rho}}$$

Siendo $\sigma = 1 / (1 - \rho)$; $a_L > 0$; $a_K > 0$. Hallar también $\dfrac{\partial\left[\dfrac{d^2K}{dL^2}\right]}{\partial\sigma}$ e interpretar su significado.

Problema Nº3

Demostrar que en la función Cobb-Douglas la elasticidad de la demanda derivada por el factor L es

$$\lambda_L = -\frac{\frac{\partial L}{\partial w}}{\frac{L}{w}} = (1 - y_w) = (1 - \alpha)$$

en tanto que para la función CES es

$$\lambda_L = (1 - y_w)\sigma$$

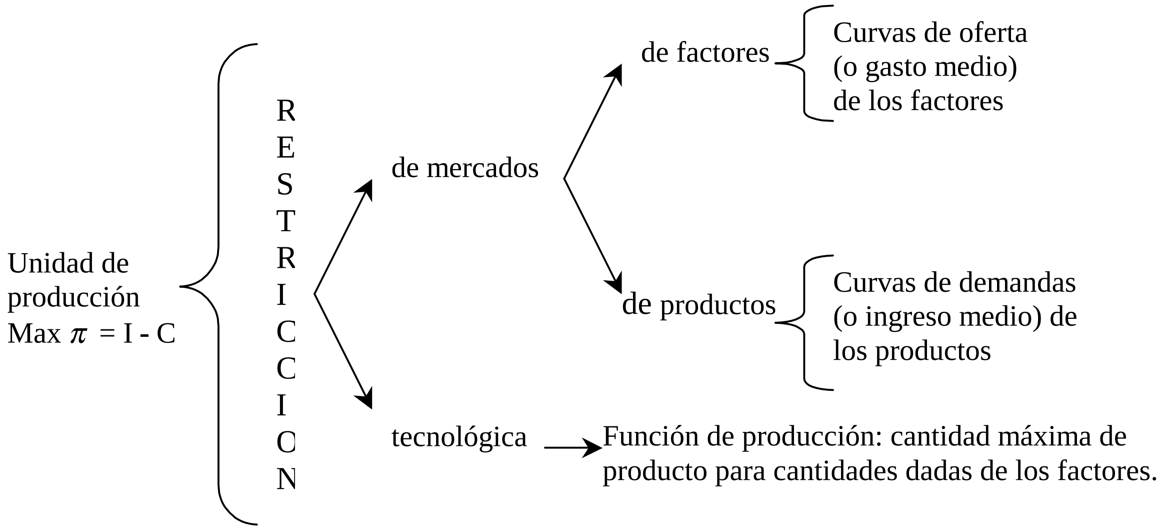
a. Interpretar los resultados.
b. Verificar el cumplimiento o no de las leyes de la demanda derivada de Marshall.

NOTA SOBRE EL MODELO DE MAXIMIZACIÓN DEL BENEFICIO. MODELO DE UNA FIRMA COMPETITIVA. UN PRODUCTO Y UN FACTOR VARIABLE

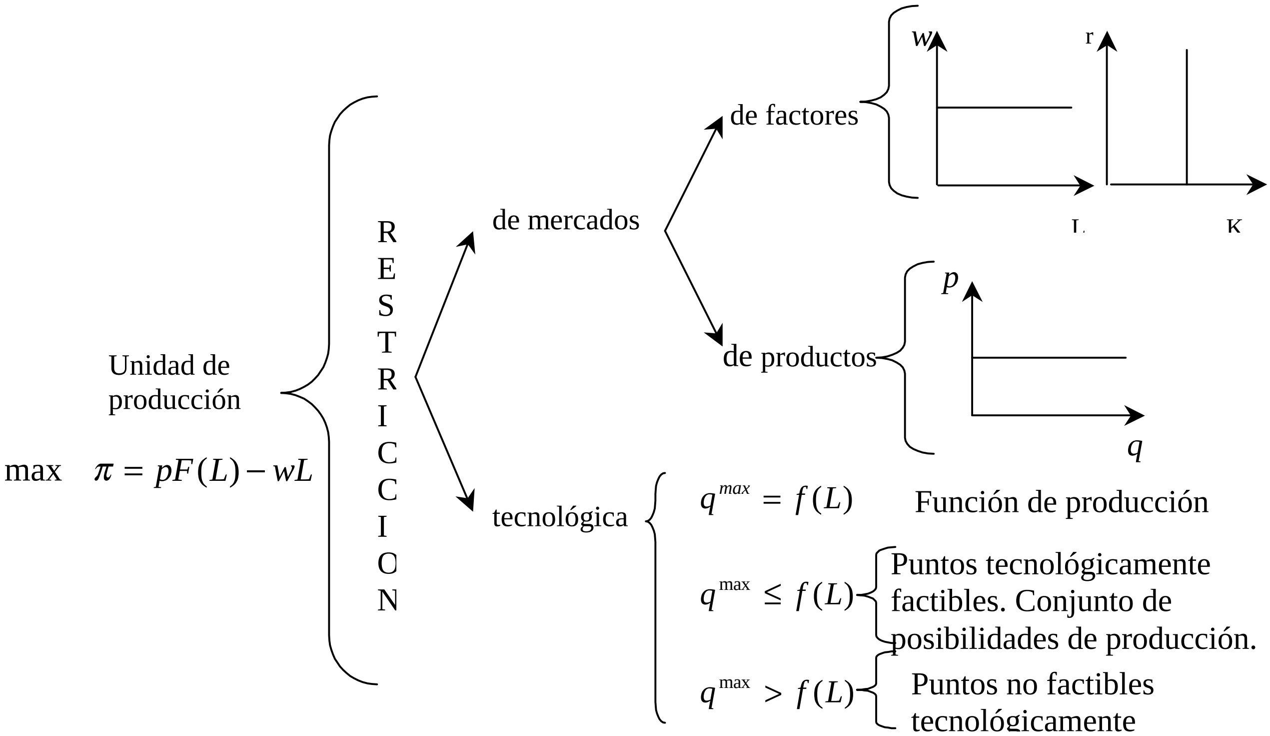
4. Nota sobre el modelo de maximización del beneficio. Modelo de una firma competitiva. Un producto y un factor variable [20]

4.1. El modelo. Funciones de demanda por el factor y de oferta del producto

La firma es un intermediario entre los mercados de factores, donde adquiere los servicios de los factores productivos, y los mercados de productos, donde vende su producción. La firma transforma los servicios de los factores en productos, sujeta a las restricciones técnicas incorporadas en su función de producción. En forma sintética,



En el caso del modelo de una firma competitiva de un producto y un factor variable,



[20] Revisión y actualización de la Nota de Clase de A. Porto que con el mismo título se incluyó en la reedición de Cuadernos Nª 34, 1989.

La primer decisión que debe tomar la empresa es si produce o no; la respuesta surge en este caso comparando **magnitudes medias o totales.** Comparando el ingreso total con el costo total, la empresa sólo producirá si

$$\pi = I - C \geq 0 \qquad (1)$$
$$\pi = [pf(L)] - [wL] \geq 0$$

o sea, si el ingreso total (medio) es mayor o igual que el costo total (medio).

Si decide producir, las condiciones para un máximo de beneficio pueden obtenerse considerando su actuación como **demandante de factores** o como **oferente de productos** (el resultado es exactamente el mismo).

Las condiciones para un máximo son

$$\frac{\partial \pi}{\partial L} = pf_L - w = 0 \qquad (2)$$

$$\frac{\partial^2 \pi}{\partial L^2} = pf_{LL} < 0 \qquad (3)$$

La condición de primer orden (2) puede ser escrita

$$w = pf_L \qquad (4)$$

que expresa que la remuneración monetaria del factor (*w*) debe ser igual al valor del producto marginal físico ($p.f_L$). La ecuación (4) representa en forma implícita una relación funcional entre las variables *L*, *w*, *p*; resolviendo se obtiene

$$L^* = L(w, p) \qquad (5)$$

que es la función de **demanda por el factor**.

La ecuación (2) puede también expresarse como,

$$\frac{w}{f_L} = p \qquad (6)$$

o sea, el costo marginal (*dC/ dQ* = variación en el costo total / variación en la producción = *wdL/dQ* = *w/* f_L) debe ser igual al precio del producto (en competencia perfecta: precio = ingreso medio = ingreso marginal). Obsérvese que *p* es \$ por unidad del producto; *w* es \$ por unidad de *L*; f_L es el producto por unidad de *L;* del cociente *w/* f_L resultan \$ por unidad del producto.

Reemplazando (5) en la función de producción se obtiene,

$$q^* = f[L^*(w, p)] \qquad (7)$$

que es la función de producción indirecta o función de **oferta del producto**.

La función de beneficio indirecta se obtiene reemplazando (5) en (1)

$$\pi^* = pf\left[L^*(p,w)\right] - wL^*(p,w) \tag{8}$$

Esta función da el valor máximo del beneficio para cada vector de precios del factor y del producto. Esta función de valor máximo tiene como argumentos las variables exógenas del modelo (p,w).

La expresión (5) es la función de demanda por el factor y la expresión (7) la función de oferta del producto. Para obtener predicciones del modelo de maximización del beneficio, sobre la respuesta de las variables endógenas (*L*, *q*) ante cambios en las variables exógenas (*w*, *p*), es necesario realizar el análisis de estática comparativa.

4.2. Estática Comparativa

4.2.1. Variación en w

Ante cambios en un parámetro, la empresa ajustará su producción (u ocupación del factor); pero lo hará de un modo tal que en el nuevo punto de equilibrio la condición de primer orden se siga cumpliendo. Derivando (2) con respecto a *w* se obtiene,

$$pf_{LL} \cdot \frac{\partial L}{\partial w} - 1 = 0$$

por consiguiente,

$$\frac{\partial L}{\partial w} = \frac{1}{pf_{LL}} < 0 \tag{9}$$

4.2.2. Variación en p

Derivando (2)con respecto a *p*,

$$f_L + pf_{LL}\frac{\partial L}{\partial p} = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial p} = -\frac{f_L}{p.f_{LL}} > 0 \tag{10}$$

Estos resultados indican que el modelo de maximización del beneficio implica signos definidos para las derivadas de la función de demanda por el factor [ecuación (5)]; la cantidad de *L* aumenta si *p* aumenta y/o si *w* disminuye.

Es fácil obtener la variación de la cantidad ofrecida del producto; derivando (7) y utilizando los resultados (9) y (10) se obtienen,

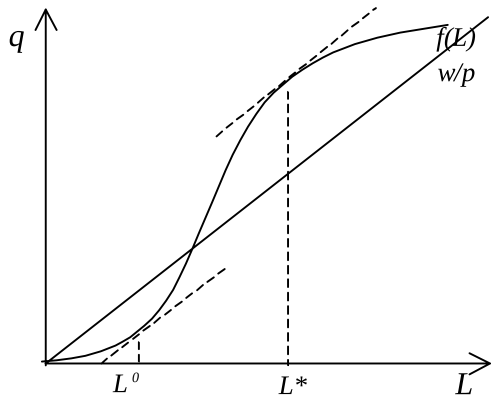
$$\frac{\partial q}{\partial w} = f_L \frac{\partial L}{\partial w} = \frac{f_L}{pf_{LL}} < 0 \qquad (11)$$

$$\frac{\partial q}{\partial p} = f_L \frac{\partial L}{\partial p} = -\frac{f_L^2}{pf_{LL}} > 0 \qquad (12)$$

y la cantidad ofrecida aumenta si aumenta el precio del producto y/o disminuye el precio del factor.

4.3. El requerimiento de concavidad de la función de producción

La condición (3) requiere que la función de producción sea cóncava,



En el gráfico, si *w/p* es el precio relativo (relación entre el precio del factor y el precio del producto, o sea, el “salario real”), el cumplimiento de la condición de primer orden implica la existencia de un máximo si la función es cóncava (en $L*$); en L_0 se trata de un mínimo (la función es convexa).

Para que exista un punto de máximo beneficio en un modelo de firma competitiva, la función de producción debe ser cóncava en ese punto.

4.4. La importancia de las magnitudes medias

La concavidad significa decrecimiento del producto marginal. La ley de las proporciones variables, por otra parte, expresa que el empresario debe llevar a cabo la producción en la región de productividades medias decrecientes; ¿cómo se interpreta este requerimiento?

Si $\pi \geq 0$

debe ser

$$pq = pf(L) \geq wL$$

o sea,

$$\frac{f(L)}{L} \geq \frac{w}{p}$$

pero *w/p* = f_L [ecuación (5)]; por consiguiente,

$$\frac{f(L)}{L} \geq f_L \qquad (13)$$

y para que $\pi \geq 0$, es necesario que el producto medio sea decreciente.

Una firma competitiva producirá en un punto donde el producto medio sea decreciente.

Siendo $\frac{w}{f_L} =$ costo marginal y $\frac{wL}{f(L)}$ el costo medio, a partir de (13) se obtiene,

$$\frac{1}{f_L} \geq \frac{L}{f(L)}$$

y, multiplicando por *w*,

$$\frac{w}{f_L} \geq \frac{wL}{f(L)} \qquad (14)$$

y para que $\pi \geq 0$, se requiere que el costo medio sea creciente.

Una firma competitiva producirá en un punto donde el costo medio sea creciente.

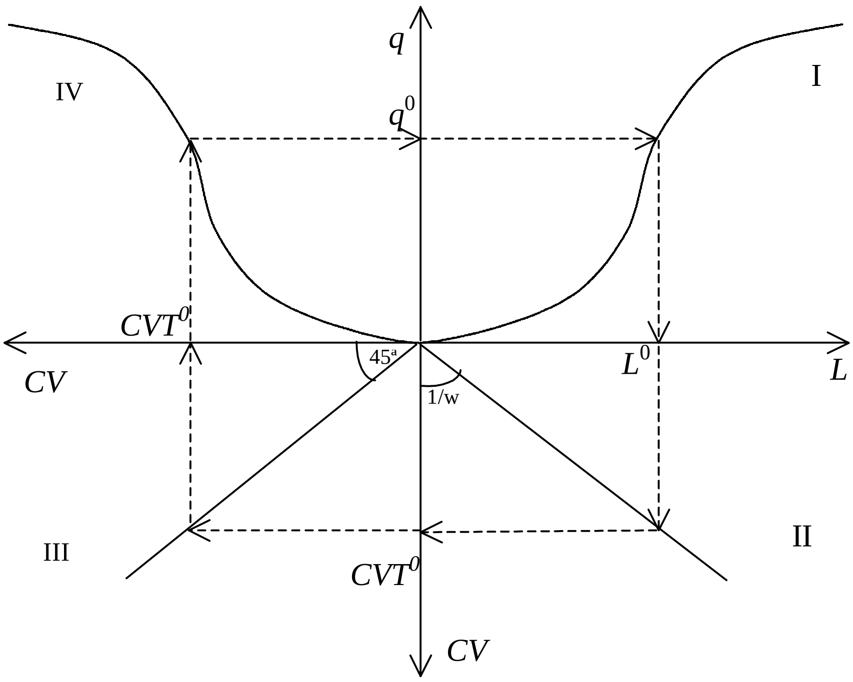
4.5. RESUMEN

* La curva de oferta de una empresa competitiva es la curva de costo marginal, a partir del punto en el que el costo marginal creciente, excede al costo medio. Para un precio inferior a *CMe* = *CMa*, la oferta de la empresa es cero.

* La curva de demanda por el factor es la curva de valor del producto marginal, a partir del punto en el que el producto marginal decreciente, es menor que el producto medio. Para un precio del factor más alto, la demanda del factor es cero.

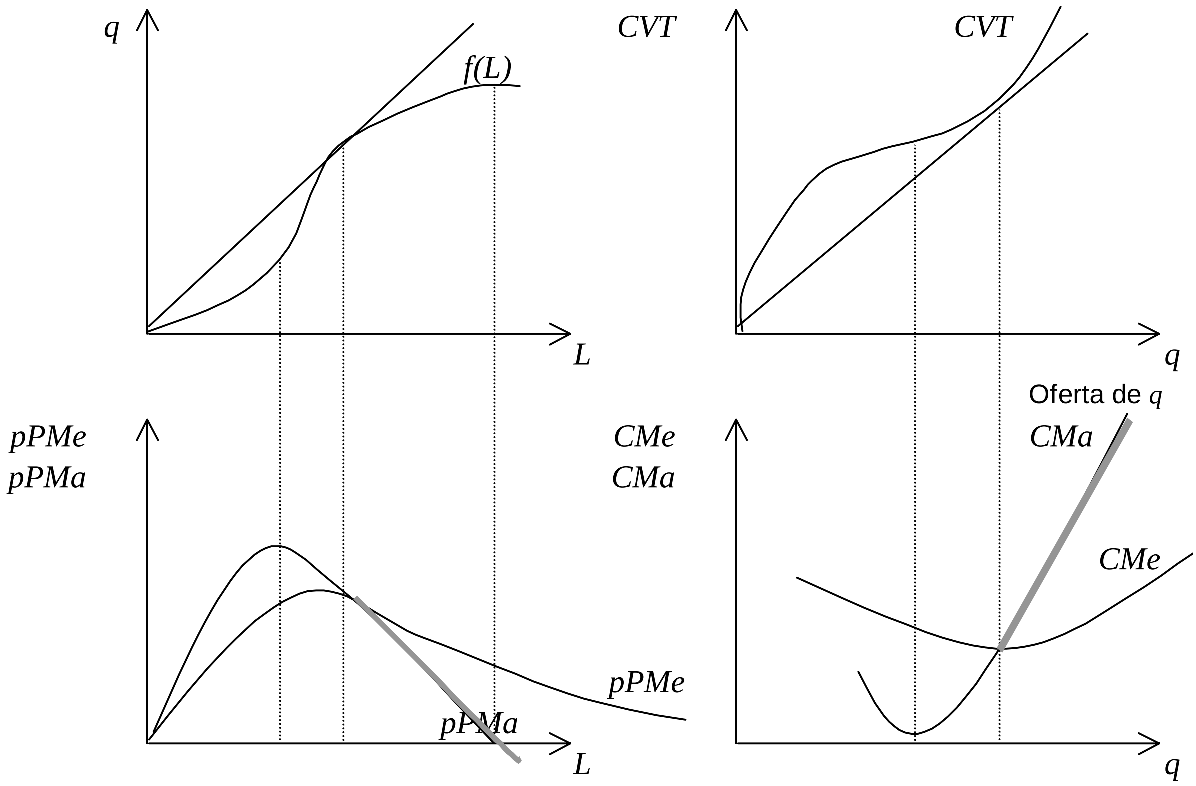
4.6. REPRESENTACIÓN GRÁFICA

4.6.1. De la función de producción a la función costos

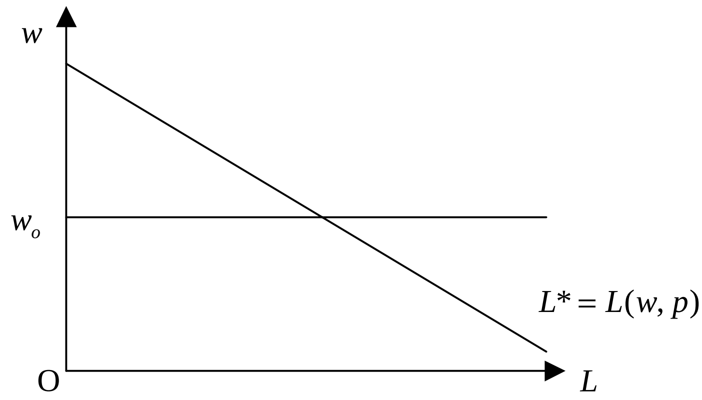


Dado un cierto nivel de *q* (q^0), la función de producción expresa la cantidad mínima de *L* (L^0) requerida (Cuadrante I); dado el precio del factor se obtiene en el Cuadrante II el costo variable total (CVT^0) ese total se traslada en el Cuadrante III utilizando una línea de 45º; finalmente, en el Cuadrante IV se obtiene el costo variable total en función de *q*.

4.6.2 La empresa como oferente del producto y como demandante del factor



4.6.3. Demanda por el factor, oferta del producto

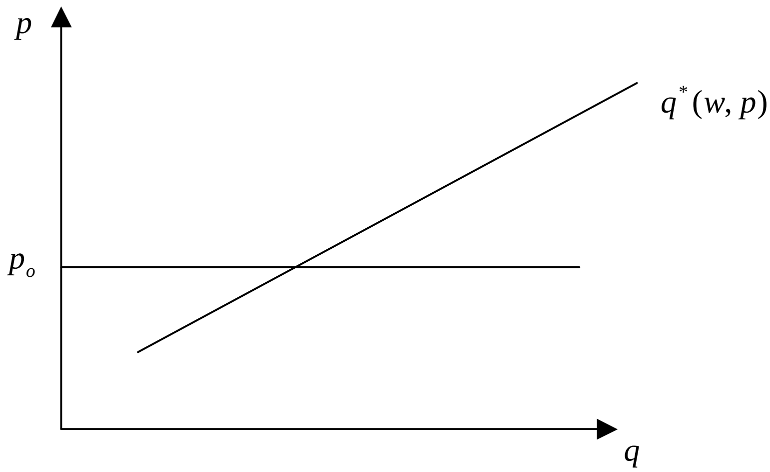


$L^* = L(w,p)$, expresión (5);

$\frac{\partial L}{\partial w} < 0$, expresión (9); movimiento a lo largo de la función;

$\frac{\partial L}{\partial p} > 0$, expresión (10); desplazamiento de la función.

Nota: en este modelo, dados *w* y *p*, se determina *L**; reemplazando en la función de producción se obtiene *q** que maximiza π .



$q^* = f[L^*(w, p)]$, expresión (7).

$\frac{\partial q}{\partial p} > 0$, expresión (11), movimiento a lo largo de la función.

$\frac{\partial q}{\partial w} < 0$, expresión (10), desplazamiento de la función.

Nota: en este modelo, dados *w* y *p*, se determina *q**; reemplazando en la función de producción se obtiene el nivel de ocupación *L** que maximiza el beneficio. Los valores son exactamente iguales a los del modelo anterior.

4.7. FUNCIÓN INDIRECTA DE BENEFICIO Y RESULTADOS DE ESTÁTICA COMPARATIVA UTILIZANDO EL TEOREMA DE LA ENVOLVENTE

Derivando (8) con respecto a *w* se obtiene

$$\frac{\partial \pi^*}{\partial w} = (pf_L - w)\frac{\partial L^*}{\partial w} - L^*$$

como $pf_L = w$ por (2) resulta,

$$\frac{\partial \pi^*}{\partial w} = -L^*(p, w)\left(= \frac{\partial \pi}{\partial w} \quad \text{en (1)} \right) \qquad (15)$$

O sea, derivando la función de beneficio indirecta con respecto al precio del factor se obtiene la función de demanda por el factor. Por envolvente, la derivada de la función indirecta con respecto a un parámetro, permitiendo que todas las variables endógenas se ajusten al nuevo valor de ese parámetro, es igual a la derivada de la función de beneficio directa (dada por (1)) con respecto al parámetro, manteniendo todo lo demás constante.

Derivando con respecto a *p* se obtiene la función de oferta del producto,

$$\frac{\partial \pi^*}{\partial p} = f\left[L^*(p,w)\right] + \left(pf_L - w\right)\frac{\partial L^*}{\partial p}$$

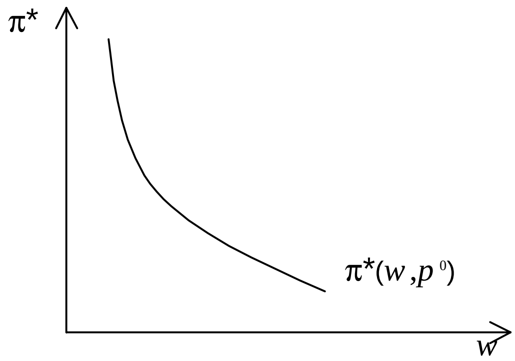
$$\frac{\partial \pi^*}{\partial p} = q^*(p,w) \qquad \left(= \frac{\partial \pi}{\partial p} \quad \text{en (1)}\right) \tag{16}$$

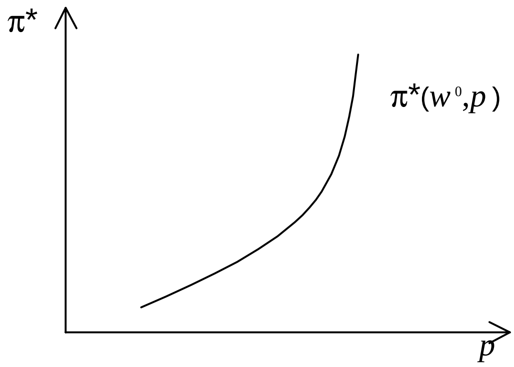
Las derivadas segundas directas de (15) y (16) dan la relación entre el resultado de estática y la forma de π^*,

$$\frac{\partial^2 \pi^*}{\partial w^2} = -\frac{\partial L^*(p,w)}{\partial w} > 0 \tag{17}$$

$$\frac{\partial^2 \pi^*}{\partial p^2} = \frac{\partial q^*(p,w)}{\partial p} > 0 \tag{18}$$

O sea, la función de beneficio indirecta es convexa en *w* y *p*.





La función de beneficio indirecta es decreciente en *w* y creciente en *p*. Es convexa en *w* y en *p*. Las derivadas con respecto a *w* y *p* son, respectivamente, las funciones de demanda por el factor y de oferta del producto.

Las derivadas segundas cruzadas de π^* son

$$\frac{\partial^2 \pi^*}{\partial p \partial w} = -\frac{\partial L^*}{\partial p} = \frac{\partial^2 \pi^*}{\partial w \partial p} = \frac{\partial q^*}{\partial w} \tag{19}$$

y se obtienen los resultados (10) y (11) anteriores.

4.8. PRIMAL-DUAL

Como $\pi^*(w, p)$ es una función de valor máximo, si se define una nueva función F como la diferencia entre la función directa (1) y la función indirecta (8) se tiene que

$$F = \pi(p, w, L) - \pi^*(p, w) \leq 0 \tag{20}$$

Esta nueva función será negativa (por definición de π^*) con un máximo cuando coincidan. Derivando con respecto a *L*, *P*, y *w*,

$$\left.\frac{\partial F}{\partial L} = pf_L - w = 0 \right\} \text{“Primal”} \tag{21}$$

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial F}{\partial p} = f(L) - f\left[L^*(p, w)\right] = 0 \qquad (22) \\ &\frac{\partial F}{\partial w} = -L + L^*(p, w) = 0 \qquad (23) \end{aligned}\right\} \text{“Dual”}$$

Las condiciones de segundo orden requieren que

$$H = \begin{vmatrix} pf_{LL} & f_L & -1 \\ f_L & -\dfrac{\partial q^*}{\partial p} & -\dfrac{\partial q^*}{\partial w} \\ -1 & \dfrac{\partial L^*}{\partial p} & \dfrac{\partial L^*}{\partial w} \end{vmatrix} < 0 \tag{24}$$

y que los menores principales alternen el signo. La condición de segundo orden implica entonces,

$$\left. pf_{LL} < 0 \right\} \text{“Primal”} \tag{25}$$

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial q^*}{\partial p} > 0 \qquad (26) \\ &\frac{\partial L^*}{\partial w} < 0 \qquad (27) \end{aligned}\right\} \begin{array}{l}\text{Resultados de estática} \\ \text{comparativa} \\ \text{“Dual”}\end{array}$$

Además, como el determinante es simétrico

$$\left. -\frac{\partial q}{\partial w} = \frac{\partial L}{\partial p} > 0 \right\} \begin{array}{l}\text{Resultados de} \\ \text{estática comparativa} \\ \text{“Dual”}\end{array} \tag{28}$$

Obsérvese que los resultados (25) a (27) corresponden a los menores principales de orden uno (elementos de la diagonal principal de (24)). Los signos definidos se mantienen en el caso de más de un factor. Significan que en el máximo, el producto marginal de cada factor debe ser decreciente, que la función de demanda debe tener pendiente negativa con respecto al precio del factor y que la oferta del producto es creciente en el precio. La igualdad en (28) es un resultado general, pero el signo está definido en este caso por tratarse de un modelo con un solo factor variable.

4.9. PROBLEMAS

Problema Nº1

La función de producción de una firma viene dada por

$q = AL^{\alpha}$ con $A > 0$; $0 < \alpha < 1$

La firma es receptora de precios en los mercados del factor (w) y del producto (P).
Se pide realizar el análisis de los puntos 1 a 8 de esta nota.

Problema Nº2

La firma de los puntos 1 a 8 puede visualizarse como oferente en el mercado del producto. El beneficio se define como

$$\pi = pq - C^*(w,q)$$

siendo las condiciones para un máximo

$$\frac{d\pi}{dq} = p - C' = 0$$

$$\frac{d^2\pi}{dq^2} = -C'' < 0$$

a) Hallar los resultados de estática comparativa con respecto a p y w.
b) Sabiendo que $C' = \frac{w}{f_L}$ expresa los resultados del punto a) de modo de obtener las expresiones (11) y (12) de esta Nota.

Problema N°3

Suponer que la función de producción de la firma es

$$q = f(L,K)$$

La función es homogénea de grado uno y la firma solo dispone de una unidad de K. Expresar los resultados de estática comparativa (9) a (12) en términos de la elasticidad de sustitución entre factores (σ).
Recordar que par funciones homogéneas de grado uno es

$$\sigma = \frac{f_L f_K}{f_{LK} q} \quad \textbf{y} \quad f_{LL} = -\frac{K}{L} f_{KL}$$

NOTA SOBRE LOS MODELOS DE MINIMIZACIÓN DE COSTOS Y MAXIMIZACIÓN DEL BENEFICIO

5. NOTA SOBRE LOS MODELOS DE MINIMIZACIÓN DE COSTOS Y MAXIMIZACIÓN DEL BENEFICIO[21]

En esta nota se analizan algunos aspectos de la conducta de una empresa que actúa como receptora de precios en los mercados del producto y de los factores. El empresario lleva a cabo el proceso productivo sujeto a las restricciones técnicas incorporadas en su función de producción, que indica la cantidad máxima de producto que puede obtener con determinadas cantidades de insumos. El análisis se efectuará con el modelo más sencillo de un bien y dos factores.

Se presentan tres modelos: (1) minimización del costo de producir una cantidad dada del bien; (2) maximización del beneficio; (3) maximización condicionada del beneficio.

5.1. MODELO DE MINIMIZACIÓN DE COSTOS

Se hallarán las condiciones analíticas que garantizan que un cierto nivel de producción (q^0) se obtiene al mínimo costo. El problema es

$$\begin{aligned} &min \quad C = wL + rK \\ &s.a. \quad q^0 = f(L,K) \end{aligned} \tag{1}$$

Formando la función de Lagrange,

$$Z = wL + rK + \lambda\left[q^0 - f(L,K)\right] \tag{2}$$

e igualando a cero las derivadas parciales con respecto a L, K y λ, se obtienen las condiciones de primer orden (CPO)

$$\frac{\partial Z}{\partial L} = w - \lambda f_L = 0 \tag{3}$$

$$\frac{\partial Z}{\partial K} = r - \lambda f_K = 0 \tag{4}$$

$$\frac{\partial Z}{\partial \lambda} = q^0 - f(L,K) = 0 \tag{5}$$

La condición de segundo orden (CSO) requiere que

$$\Delta_{PMC} = \begin{vmatrix} -\lambda f_{LL} & -\lambda f_{LK} & -f_L \\ -\lambda f_{KL} & -\lambda f_{KK} & -f_K \\ -f_L & -f_K & 0 \end{vmatrix} < 0 \tag{6}$$

[21] Revisión y actualización de la "Nota sobre el Modelo de Maximización del Beneficio" de A. Porto, UNLP, 1984, que con el mismo título se incluyó en la re-edición de Cuadernos, Nª34, 1989. Se agradece la colaboración de Josefina Posadas.

Si se cumple (6), el sistema de ecuaciones representativo de las condiciones de primer orden, puede resolverse para las variables de decisión (o variables endógenas) en función de los parámetros (o variables exógenas).

$$L^* = L(w, r, q^0) \tag{7}$$
$$K^* = K(w, r, q^0) \tag{8}$$
$$\lambda^* = \lambda(w, r, q^0) \tag{9}$$

Las ecuaciones (7) y (8) son las funciones de demanda de factores para un nivel de producción constante —o sea, para movimientos a lo largo de una isocuanta. Reemplazando en (1) se obtiene la función de costos indirecta,

$$C^* = C(w, r, q^0) \tag{10}$$

que expresa el costo mínimo en función de los precios de los factores y del nivel de producción.
Por el teorema de la envolvente,

$$\frac{\partial C^*}{\partial q^0} = \frac{\partial Z}{\partial q^0} = \lambda^* = \text{costo marginal } (CMa) \tag{11}$$

A partir de la función de costo indirecta también se obtienen las demandas compensadas de los factores

$$\frac{\partial C^*}{\partial w} = \frac{\partial Z}{\partial w} = L^*(w, r, q^0)$$

$$\frac{\partial C^*}{\partial r} = \frac{\partial Z}{\partial r} = K^*(w, r, q^0)$$

Las derivadas segundas directas tienen signos definidos, dada la concavidad de la función indirecta de costos. Estos signos indican una relación negativa entre la variación del precio de un factor y la cantidad demandada,

$$\frac{\partial^2 C^*}{\partial w^2} = \frac{\partial L^*}{\partial w} < 0$$

$$\frac{\partial^2 C^*}{\partial r^2} = \frac{\partial K^*}{\partial r} < 0$$

De las derivadas segundas cruzadas de la función de costos se obtienen los siguientes resultados

$$\frac{\partial^2 C^*}{\partial w \partial r} = \frac{\partial^2 C^*}{\partial r \partial w}$$

$$\frac{\partial L^*}{\partial r} = \frac{\partial K^*}{\partial w}$$

5.2. MODELO DE MAXIMIZACIÓN DE BENEFICIOS

En este modelo el problema es hallar las condiciones analíticas para la maximización del beneficio,

$$max \quad \pi = Pf(L,K) - wL - rK \tag{12}$$

Las CPO son

$$\frac{\partial \pi}{\partial L} = Pf_L - w = 0 \tag{13}$$

$$\frac{\partial \pi}{\partial K} = Pf_K - r = 0 \tag{14}$$

Las CSO requieren que el determinante sea positivo

$$\Delta_{PMB} = \begin{vmatrix} Pf_{LL} & Pf_{LK} \\ Pf_{KL} & Pf_{KK} \end{vmatrix} > 0 \tag{15}$$

y sus menores principales negativos[22]

$$Pf_{LL} < 0 \tag{16}$$

$$Pf_{KK} < 0 \tag{17}$$

Suponiendo que se cumplen las CSO, resolviendo (13) y (14) se obtienen las funciones de demanda de los factores,

$$L^* = L^*(w,r,P) \tag{18}$$

$$K^* = K^*(w,r,P) \tag{19}$$

Reemplazando (18) y (19) en (12) se obtiene la función de beneficio indirecta,

$$\pi^* = \pi^*(w,r,P) \tag{20}$$

que expresa el beneficio máximo en función de los precios de los insumos y del producto.

Es interesante destacar que las CSO requeridas para un máximo beneficio NO son necesarias para la minimización de costos. El cumplimiento de (6) NO implica el cumplimiento de (15) a (17)[23]. Pero el cumplimiento de (15) a (17) implica que se cumple (6).

[22] En realidad, si (15) es positivo y uno de los menores principales es negativo, el otro necesariamente es negativo.

[23] Por ejemplo, desarrollando (6) resulta

$$\Delta_{PMC} = \lambda\left[f_{LL} f_K^2 - 2 f_{LK} f_L f_K + f_{KK} f_L^2 \right] < 0$$

Por el teorema de la envolvente

$$\frac{\partial \pi^*}{\partial w} = \frac{\partial \pi}{\partial w} = -L^*(w,r,P)$$
$$\frac{\partial \pi^*}{\partial r} = \frac{\partial \pi}{\partial r} = -K^*(w,r,P)$$
$$\frac{\partial \pi^*}{\partial P} = \frac{\partial \pi}{\partial P} = q^*(w,r,P)$$

que son las demandas de los factores y la oferta del bien, en función de los precios de los factores y del precio del producto.

La función de beneficio indirecta es convexa en precios de los factores y del producto. Esa convexidad indica los signos de estática comparativa del modelo,

$$\frac{\partial^2 \pi^*}{\partial w^2} = -\frac{\partial L^*}{\partial w} > 0$$
$$\frac{\partial^2 \pi^*}{\partial r^2} = -\frac{\partial K^*}{\partial r} > 0$$
$$\frac{\partial^2 \pi^*}{\partial P^2} = \frac{\partial q^*}{\partial P} > 0$$

o sea, las cantidades demandadas de factores varían en relación inversa con sus respectivos precios y la cantidad ofrecida en relación directa con el precio del bien.

A partir de las derivadas cruzadas de la función de beneficio indirecta se obtienen las condiciones de reciprocidad

$$\frac{\partial^2 \pi^*}{\partial w \partial r} = \frac{\partial^2 \pi^*}{\partial r \partial w}$$
$$-\frac{\partial L^*}{\partial r} = -\frac{\partial K^*}{\partial w}$$

---

y $f_{ii} < 0$ no es condición ni necesaria ni suficiente para $\Delta_{PMC} < 0$. No es condición necesaria porque f_{LL} y/o f_{KK} pueden ser positivas (o cero) y cumplirse $\Delta_{PMC} < 0$ si $f_{LK} > 0$ y predomina el segundo término sobre la suma de los otros dos. No es condición suficiente porque ambas f_{ii} pueden ser negativas y $\Delta_{PMC} > 0$ si $f_{LK} < 0$ y predomina sobre la suma de los otros dos términos.
Supóngase que la función de producción es homogénea de grado uno (rendimientos constantes a escala) y que las productividades marginales son decrecientes, o sea, cumplen (16) y (17); en este caso $\Delta_{PMC} = -\frac{\lambda f_{LK} q^2}{LK} < 0$ dado que $f_{LK} > 0$ pero $\Delta_{PMB} = 0$.
Se cumple la condición de minimización de costos pero no la de maximización de beneficios. Similarmente, si los rendimientos a escala son crecientes, puede cumplirse (6) pero no (15).

$$\frac{\partial^2 \pi^*}{\partial w \partial P} = \frac{\partial^2 \pi^*}{\partial P \partial w}$$
$$-\frac{\partial L^*}{\partial P} = \frac{\partial q^*}{\partial w}$$

$$\frac{\partial^2 \pi^*}{\partial r \partial P} = \frac{\partial^2 \pi^*}{\partial P \partial r}$$
$$-\frac{\partial K^*}{\partial P} = \frac{\partial q^*}{\partial r}$$

5.3. MAXIMIZACIÓN CONDICIONADA DEL BENEFICIO

En este modelo se hallan las CPO y las CSO para un máximo del beneficio

$$\pi = Pq - wL - rK \tag{21}$$

donde q, L y K se consideran variables independientes, sujetas a la restricción

$$q = f(L, K) \tag{22}$$

Formando la función de Lagrange

$$Z = Pq - wL - rK + \lambda[f(L, K) - q]$$

e igualando a cero las derivadas parciales con respecto a q, L, K y λ, se obtienen las CPO para un máximo.

$$\frac{\partial Z}{\partial q} = P - \lambda = 0 \tag{23}$$
$$\frac{\partial Z}{\partial L} = -w + \lambda f_L = 0 \tag{24}$$
$$\frac{\partial Z}{\partial K} = -r + \lambda f_K = 0 \tag{25}$$
$$\frac{\partial Z}{\partial \lambda} = f(L, K) - q = 0 \tag{26}$$

Las CSO requieren que el hessiano orlado

$$\Delta_{PCMB} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & \lambda f_{LL} & \lambda f_{LK} & f_L \\ 0 & \lambda f_{KL} & \lambda f_{KK} & f_K \\ -1 & f_L & f_K & 0 \end{vmatrix} < 0 \tag{27}$$

sea negativo y que todos los menores principales sean positivos[24]

$$\Delta_{PCMB11} = \begin{vmatrix} \lambda f_{LL} & \lambda f_{LK} & f_L \\ \lambda f_{KL} & \lambda f_{KK} & f_K \\ f_L & f_K & 0 \end{vmatrix} > 0 \tag{28}$$

$$\Delta_{PCMB22} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & \lambda f_{KK} & f_K \\ -1 & f_K & 0 \end{vmatrix} > 0 \tag{29}$$

$$\Delta_{PCMB33} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & \lambda f_{LL} & f_L \\ -1 & f_L & 0 \end{vmatrix} > 0 \tag{30}$$

Las condiciones (27) a (30) ya han sido halladas en los dos modelos anteriores.

Desarrollando (27) se obtiene

$$\Delta_{PCMB} = -\lambda^2 \left(f_{LL} f_{KK} - f_{LK}^2 \right) < 0$$

que es igual a la condición dada por (15) —obsérvese que por la CPO (23) es $P = \lambda$.
En forma similar se obtienen

$$\Delta_{PCMB22} = -\lambda^2 f_{KK} > 0$$
$$\Delta_{PCMB33} = -\lambda^2 f_{LL} > 0$$

que son las mismas condiciones dadas por (16) y (17).

Pero para que el beneficio sea máximo, se requiere también que Δ_{PCMB11} sea positivo y ésta es la condición para que los costos sean mínimos, según surge de (6). Δ_{PCMB11} está implicada por la maximización del beneficio, pero no implica a las otras condiciones requeridas para el máximo de beneficio.
Las CPO de este modelo no constituyen una estructura integrada. (24) y (25) son las condiciones marginales requeridas para la minimización del costo. Si a estas dos condiciones marginales se agrega (26) con $q = q^0$, o sea, un nivel dado de producción, se trata del modelo 1; si se consideran (24) y (25) junto con (23) —que requiere la igualdad del precio con el costo marginal— se trata del modelo 2; en este modelo se obtienen las funciones de demanda de factores dadas por (18) y (19), que reemplazados en (26) permiten obtener la función de oferta del producto.

$$q^* = q^*(w, r, P) \tag{31}$$

---

[24] "border preserving principal minor", o sea, los Δ_{11} Δ_{22} Δ_{33}, que resulta de eliminar la primera fila y la primera columna, etc.; pero no Δ_{44} que elimina la fila y la columna del orlado.

Los resultados de estática comparativa de este modelo, con respecto a cambios en el precio del producto son

$\frac{\partial \lambda}{\partial P} = 1$ Igualdad de precio y costo marginal

$$\frac{\partial L^*}{\partial P} = -\frac{\Delta_{12}}{\Delta_3} >=< 0 \qquad (32)$$

$$\frac{\partial K^*}{\partial P} = -\frac{\Delta_{13}}{\Delta_3} >=< 0 \qquad (33)$$

$$\frac{\partial q^*}{\partial P} = -\frac{\Delta_{11}}{\Delta_3} > 0 \qquad (34)$$

El signo de (34) está definido porque está implicado en las CSO; no ocurre lo mismo con (32) y (33) pues las CSO no imponen restricciones sobre los signos de Δ_{12} y Δ_{13} (pero uno de los dos debe ser positivo y predominar para que la producción aumente).

5.4. PROBLEMAS

Problema Nº1

Realizar el análisis de esta nota utilizando una función de producción

$$q = L^{\alpha} K^{\beta} \qquad \begin{array}{l} 0 < \alpha < 1 \\ 0 < \beta < 1 \end{array}$$

Interpretar los resultados para $\alpha + \beta >=< 1$

NOTA SOBRE ELASTICIDAD DE LA DEMANDA DERIVADA

6. NOTA SOBRE ELASTICIDAD DE LA DEMANDA DERIVADA[25]

6.1. INTRODUCCIÓN

La expresión más general para la elasticidad de la demanda derivada por un factor de la producción, en un modelo de competencia perfecta con dos factores trabajo (*L*) y capital (*K*), cuyos precios son respectivamente *w* y *r*), es la dada por J.R. Hicks[26],

$$\lambda_L = -\frac{\partial L}{\partial w}\frac{w}{L} = \frac{\sigma.(\eta+\varepsilon)+y_w.\varepsilon.(\eta-\sigma)}{\eta+\varepsilon-y_w.(\eta-\sigma)} \quad (1)$$

donde,
σ, es la elasticidad de sustitución entre factores (definida positiva)
ε, es la elasticidad de la oferta del factor cooperante (en el caso normal, positiva)
η, es la elasticidad de la demanda por el producto (definida positiva)
y_w, es la participación del factor L en el costo total (necesariamente positiva)

Marshall formuló cuatro "leyes" sobre la elasticidad de la demanda derivada. Esas leyes, en el orden en que Marshall las expuso, son las siguientes:

La demanda derivada por un factor de la producción será más elástica:
1) cuanto mayor sea la elasticidad de sustitución entre factores;
2) cuanto más elástica sea la demanda por el producto final ;
3) cuanto mayor sea su participación en el costo total;
4) cuanto más elástica sea la oferta del factor cooperante

Las "leyes" serán verificadas si las derivadas parciales de la expresión (1), con respecto a cada una de las variables, tienen signo positivo.

$$\frac{\partial \lambda_L}{\partial \sigma} = \frac{(1-y_w).(\eta+\varepsilon)^2}{[\eta+\varepsilon-y_w(\eta-\sigma)]^2} \quad (2)$$

$$\frac{\partial \lambda_L}{\partial \eta} = \frac{\lambda_w(\varepsilon+\sigma)^2}{[\eta+\varepsilon-y_w(\eta-\sigma)]^2} \quad (3)$$

$$\frac{\partial \lambda_L}{\partial y_w} = \frac{(\eta+\varepsilon).(\varepsilon+\sigma).(\eta-\sigma)}{[\eta+\varepsilon-y_w(\eta-\sigma)]^2} \quad (4)$$

[25] Revisión y actualización de la Nota de Clase de Alberto Porto "Elasticidad de la demanda derivada" publicada en la Serie Cuaderno, Nº 34, 1980. Colaboró en esta revisión la Lic. Josefina Posadas.

[26] En el modelo de Hicks (1964) se estudia la demanda derivada del mercado por factores productivos. En su análisis supone condiciones competitivas en todos los mercados, dos factores y rendimientos constantes a escala. Una forma alternativa al Apéndice de Hicks de obtener la expresión (1) del texto puede consultarse en Dieguez y Porto (1972).

$$\frac{\partial \lambda_L}{\partial \varepsilon} = \frac{\gamma_w.(1-y_w).(\eta-\sigma)^2}{[\eta+\varepsilon-y_w(\eta-\sigma)]^2} \qquad (5)$$

Las "leyes" primera, segunda y cuarta son válidas dado que las expresiones (2), (3) y (5) son siempre positivas. Pero la tercera ley no es válida en todos los casos; aún descartando los casos de ε negativa, la expresión (4) sólo es positiva si $\eta > \sigma$.

La finalidad de esta nota es brindar una explicación simple del significado de cada una de las leyes de la demanda derivada.

6.2. LA DEMANDA DERIVADA A PARTIR DEL MODELO DE MAXIMIZACIÓN DEL BENEFICIO

Supóngase una empresa cuya función de producción es

$$q = f(L,K) \qquad (6)$$

que actúa como receptora de precios tanto en el mercado del producto como en los mercados de factores. La función de beneficio viene dada por,

$$\pi = p.f(L,K) - wL - rK \qquad (7)$$

Las condiciones de primer orden para un máximo son,

$$\frac{\partial \pi}{\partial L} = p.f_L - w = 0 \qquad (8)$$

$$\frac{\partial \pi}{\partial K} = p.f_k - r = 0 \qquad (9)$$

Las condiciones de segundo orden son,

$$p.f_{LL} < 0 \quad \text{y} \quad f_{LL}.f_{KK} - f_{LK}^{\ 2} > 0 \qquad (10)$$

Las condiciones de primer orden constituyen un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas (*L*, *K*); *w*, *r* y *p* son variables exógenas para el empresario competitivo.

6.2.1. Estática comparativa ante un cambio en *w*

Si varía *w*, se modifican los valores de *L* y *K* pero de un modo tal que en el nuevo punto de equilibrio las condiciones (8) y (9) se sigan cumpliendo. Derivando las condiciones de primer orden respecto de *w* se obtiene

$$p.f_{LL}.\frac{\partial L}{\partial w} + p.f_{LK}\frac{\partial K}{\partial w} = 1 \qquad (11)$$

$$p.f_{KL}.\frac{\partial L}{\partial w} + p.f_{KK}\frac{\partial K}{\partial w} = 0 \qquad (12)$$

y resolviendo,

$$\frac{\partial L}{\partial w} = \frac{f_{KK}}{p.(f_{LL}.f_{KK} - f_{LK}{}^2)} < 0 \tag{13}$$

$$\frac{\partial K}{\partial w} = \frac{-f_{LK}}{p.(f_{LL}.f_{KK} - f_{LK}{}^2)} \geq=\leq 0 \tag{14}$$

Por condiciones de segundo orden, el denominador de las expresiones (13) y (14) es positivo. La expresión (13) es negativa. La expresión (14) puede ser positiva o negativa; en el caso general $f_{LK} > 0$ y por consiguiente la expresión (14) es negativa.

El efecto sobre L de un cambio en w puede descomponerse en dos partes:

(i) en primer lugar, un movimiento sobre la curva original de valor del producto marginal, suponiendo que K se mantiene constante;

(ii) en segundo lugar, un desplazamiento hacia otra curva de valor del producto marginal como consecuencia de que al variar w se altera la cantidad utilizada de K.

O sea,

$$\left(\frac{\partial L}{\partial w}\right)_{Total} = \left.\frac{\partial L}{\partial w}\right|_{K\ constante} + \frac{\partial L}{\partial K}\frac{\partial K}{\partial w} \tag{15}$$

Los dos términos de la expresión (15) pueden obtenerse de (11). Haciendo $\frac{\partial K}{\partial w} = 0$ resulta,

$$\left.\frac{\partial L}{\partial w}\right|_{K\ constante} = \frac{1}{p.f_{LL}} \tag{16}$$

La utilización de *K* varía según la expresión (14). Esta indica que

$\frac{\partial K}{\partial w} > 0$ si $f_{LK} < 0$; y

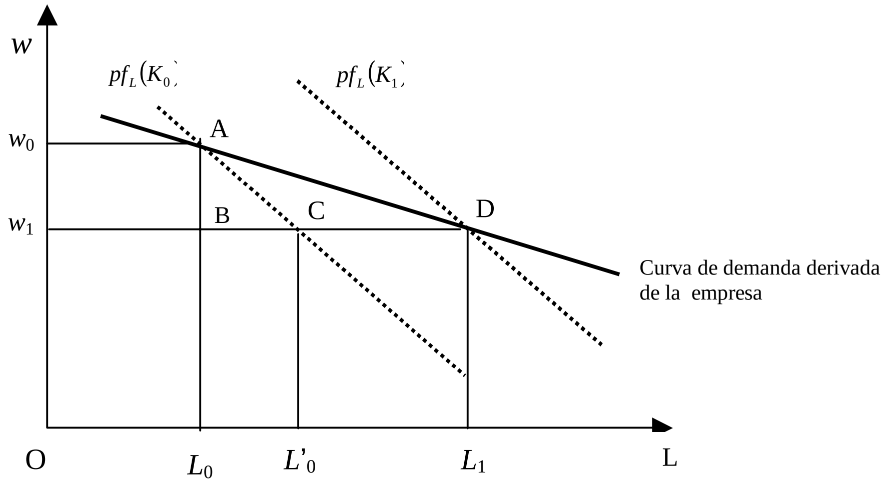
$\frac{\partial K}{\partial w} < 0$ si $f_{LK} > 0$;

siendo éste último el caso general. El segundo término de (15) es,

$$\frac{\partial L}{\partial K}\frac{\partial K}{\partial w} = \frac{f_{LK}^2}{p.(f_{LL}.f_{KK} - f_{LK}{}^2).f_{LL}} < 0 \tag{17}$$

La suma de (16) y (17) da el efecto total indicado por (13). Debe observarse que los dos efectos actúan en el mismo sentido. Si cae *w*, *L* aumenta y si *w* sube, *L* disminuye.

Gráfico Nº 1



En el Gráfico Nº 1, $p.f_L(K_0)$ es la curva inicial del valor del producto marginal de *L*; el punto A con coordenadas $w_0 - L_0$ es el equilibrio inicial; se ocupa K_0 del factor cooperante.

Si *w* disminuye a w_1, el ajuste puede descomponerse en dos partes:

a) el paso de L_0 a $L_0^{/}$ (o de A a C) sobre la misma curva del producto marginal; y

b) el paso de $L_0^{/}$ a L_1 (o de C a D). La baja de *w* origina una variación en *K* (de cualquier signo) de K_0 a K_1, lo que produce un desplazamiento hacia la derecha de la curva de valor del producto marginal de *L*.

Uniendo los puntos A y D se obtiene la función de demanda derivada por el factor *L*, para la empresa individual.

El punto B corresponde al ajuste de *L* originado por el efecto sustitución puro; si *w* cae y la producción se mantiene constante, *L* sustituirá al otro factor (*K*). En el caso general, cuando $f_{LK} > 0$ la curva del valor del producto marginal de L se desplaza a otra más baja (el punto B se ubica a la izquierda de C). En el caso en que $f_{LK} < 0$ el punto B puede ubicarse a la derecha de C.

En el Gráfico Nº1 se observa que la curva de demanda es más elástica que la curva del valor del producto marginal. Formalmente este resultado puede obtenerse completando elasticidades en (13) y (16) resultando,

$$\lambda_L = -\frac{\partial L}{\partial w}\frac{w}{L} = -\frac{w.f_{KK}}{p.(f_{LL}.f_{KK} - f_{LK}^2).L} \tag{18}$$

$$\lambda_L^{/} = -\frac{\partial L}{\partial w}\frac{w}{L} = -\frac{w}{p.f_{LL}.L} \tag{19}$$

siendo,

λ_L, la elasticidad de la demanda derivada por el factor *L*

$\lambda_l^{/}$, la elasticidad de la curva del valor del producto marginal de *L*

Comparando las dos últimas expresiones, se demuestra que

$\lambda_L > \lambda_l^{/}$

dada la desigualdad

$$\frac{1}{(f_{LL} \cdot f_{KK} - f_{LK}^2)} > \frac{1}{f_{KK}\, f_{LL}}$$

que se verifica si se cumplen las condiciones de segundo orden.

6.3. Primera ley de Marshall

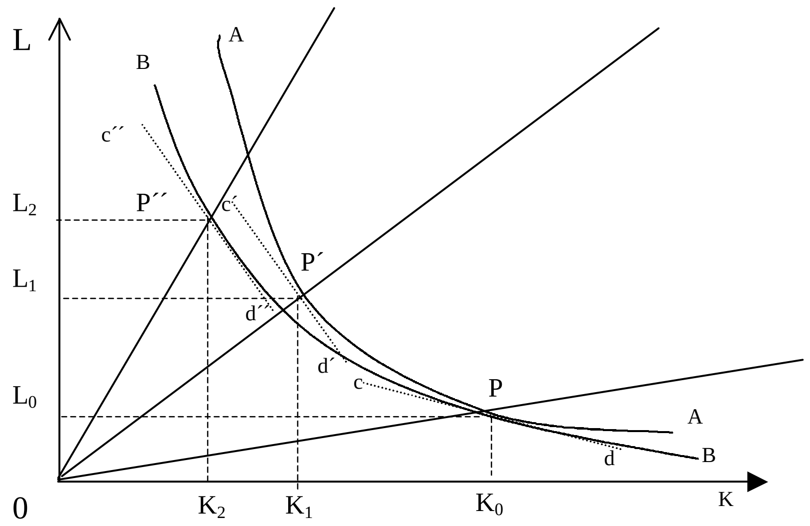
En el Gráfico Nº 2 las isocuantas AA y BB corresponden a dos tecnologías con diferente elasticidad de sustitución (mayor en B que en A). El precio relativo inicial de los factores está dado por la pendiente de CD. En ambas tecnologías se ocupan L_0 trabajadores y K_0 unidades de capital. La pendiente de la recta OP representa la utilización media de factores.

Si *w* disminuye, el precio relativo de los factores pasa de ser la pendiente de CD a ser la pendiente de C´D´ (que es igual a la de C´´D´´); en ambas tecnologías aumenta la utilización de *L* y disminuye la de *K*, pero el aumento porcentual en la utilización de *L* será tanto mayor cuanto mayor la elasticidad de sustitución ($\frac{L_0 L_2}{L_0 0}$ en B versus $\frac{L_0 L_1}{L_0 0}$ en A).

En el Gráfico Nº 1 el punto B estará tanto más hacia la derecha del punto A cuanto mayor sea la elasticidad de sustitución. En el caso extremo en que la elasticidad de sustitución sea igual a cero, el punto B se ubicará sobre la paralela al eje de ordenadas que pasa por A.

Esta es la primera ley de Marshall, que como se vio en el punto 1, es universalmente válida (ver expresión (2)).

Gráfico Nº 2



6.4. SEGUNDA LEY DE MARSHALL

Si se considera la empresa del Gráfico Nº 1 como empresa representativa, es evidente que el nivel de producción de esa empresa y el de la industria aumentará al caer *w*.

El aumento de la producción reducirá el precio y esto desplazará tanto las curvas del valor del producto marginal como la curva de demanda derivada del Gráfico Nº 1, que fueron construidas suponiendo p constante.

En el Gráfico Nº3 se representa la situación en el mercado del bien q

$C_0^{/}$ es la curva de oferta del bien cuando $w = w_0$

$p_0 - q_0$ es la combinación inicial precio - cantidad.

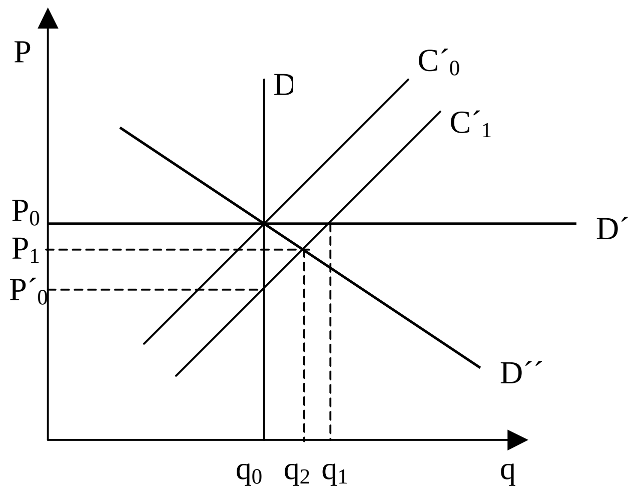
Si w disminuye a w_1 se desplazan hacia abajo las curvas de costo marginal de las empresas y la oferta del mercado vendrá dada por la curva $C_1^{/}$

El precio y la cantidad del bien se ajustarán según la elasticidad de la demanda. Si $\eta \to \infty$ el precio permanece constante y la cantidad de expande a q_1. Si $\eta = 0$ la cantidad permanece constante y el precio disminuye a $p_0^{/}$. Si $0 < \eta < \infty$ el ajuste se logra en parte a través del precio y en parte a través de cantidad (por ejemplo, el par $p_2 - q_2$ en el gráfico 3).

Si el precio del bien no se modifica ($\eta \to \infty$) las curvas del valor del producto marginal y la curva de demanda derivada del Gráfico Nº 1 no cambian. Si el precio baja se desplazarán hacia la izquierda y la cantidad resultante para w_1 estará tanto más próxima a D cuanto mayor sea la elasticidad de la demanda y más próxima a B cuanto más inelástica sea la demanda por el bien.

Esta es la segunda ley de Marshall que, como se vio en el punto 1, es universalmente válida, (ver la expresión (3)).

Gráfico 3



6.5. TERCERA LEY DE MARSHALL

La tercera ley es la que ha generado dificultades dado que, aún dejando de lado los casos de ε negativa, sólo se cumple sí $\eta > \sigma$ (ver la expresión (4)). Un problema asociado ha sido el de encontrar una explicación adecuada para la excepción a la tercera ley. En esta nota se incluyen algunas explicaciones propuestas y se presenta una explicación alternativa que se considera relevante.

Algunas de las explicaciones avanzadas para la tercera ley son las siguientes:

(i) J. R. Hicks: "Aún si nos limitamos solamente a los casos donde ε es positiva, (η y σ deben ser positivas) la … regla es solamente válida en la medida en que la elasticidad de la demanda por el producto sea mayor que la elasticidad de sustitución. Por supuesto, en los casos usuales tomados para ilustración de esta regla, se cumple la condición para su validez. Se supone que la demanda por el producto es elástica, mientras que la sustitución es difícil. Pero si la sustitución es fácil, mientras que la demanda por el producto es inelástica, la regla trabaja de otra forma. Por ejemplo, un factor puede encontrar más fácil beneficiarse con una restricción en la oferta si juega una gran parte en el proceso de producción que si juega una parte pequeña. *Es "importante no ser importante" solo cuando el consumidor puede sustituir más fácilmente que el empresario*. Aún si $\eta > \sigma$, pero la diferencia es pequeña, la importancia de esta segunda regla será insignificante".

(ii) G.J.Stigler: "Hay una regla que parece más obvia a la mayoría de la gente que cualquiera de las anteriores: cuanto menor es la fracción del costo total que corresponde a los pagos a un servicio productivo, menos elástica será su demanda. Si los timbres duplican su precio (de $1 a $2), el costo de construir una casa también aumentará en $1. Debido a que muy poca gente dejará de comprar una casa por este aumento, la demanda de timbres será muy inelástica. Hay algo de cierto en la regla, pero su limitación básica puede ser sugerida como sigue. Supongamos que se clasifican los carpinteros que construyen casas en polacos, alemanes, irlandeses, etc. Puesto que los salarios de cualquiera de estos grupos será una pequeña fracción del costo total (en caso de no serlo, subclasificamos a los mismos según la ciudad de origen) ¿no podemos decir que la elasticidad de la demanda por carpinteros irlandeses es menor que la elasticidad de la demanda por todos los carpinteros? Verdaderamente podemos decirlo, ya que la libertad de expresión incluye la libertad de expresarse con errores. El punto es que la sustitución es mayor cuando subclasificamos a los carpinteros y es el efecto sustitución el que conduce a un incremento en la elasticidad de la demanda. Este será usualmente el caso, o seríamos capaces por una mera subclasificación de convertir a toda demanda derivada en inelástica".

(iii) D.H.Robertson[27] "… si la demanda de carbón es muy inelástica mientras que los mineros pueden ser fácilmente sustituidos por máquinas, se reforzaría la posición de los trabajadores para que sus salarios constituyeran una gran parte del costo total. Esto no es fácil de ver por sentido común, pero puede ser expuesto en la forma siguiente. En el caso supuesto, el punto débil en la posición de los mineros es el riesgo de sustitución. Pero este punto débil será tanto menos serio en sus

[27] Tomado de Bronfenbrenner.

consecuencias cuanto mayor sea el campo sobre el cual tiene que ser aplicado para inferirles un grave daño; es decir, cuanto mayor sea la proporción que, en el punto de partida, tienen los salarios en el costo total".

(iv) M. Bronfenbrenner interpreta en la siguiente forma la explicación de Robertson: " Robertson parece estar implicando que un alto κ opera técnicamente reduciendo el valor de σ [28]; o sea, " que la elasticidad de sustitución cae con la importancia del servicio productivo en el costo total". *Esto provee en nuestro punto de vista el mayor elemento de plausibilidad para el caso especial en que la tercera ley de Marshall no se cumple, y debemos su desarrollo a Robertson.*

(v) Se analizará ahora con más detalle por qué vías y_w influye en determinar el valor de la elasticidad de la demanda derivada por un factor. De las explicaciones citadas surge con claridad que una vía la constituye la elasticidad de la demanda por el producto y, otra vía, la elasticidad de sustitución entre factores.

(a) La primera vía aparece muy clara. Si *w* varía, el costo de producción y el precio del producto variarán en un porcentaje que será tanto mayor cuanto mayor sea y_w; dada la variación en el precio, la variación en la cantidad será mayor cuanto mayor sea η; y cuanto mayor la variación en la cantidad, mayor será la variación de *L* necesaria para producirla. *Por consiguiente, dado todo lo demás, cuanto mayor sea la participación de un factor en el costo total, más elástica será la demanda derivada por ese factor*.

(b) Explicar la segunda vía es más complicado. Si *w* varía en un determinado porcentaje, el precio relativo de los factores $\frac{r}{w}$ variará en la misma proporción,

$$d\left(\frac{r}{w}\right) = -\frac{r}{w^2}\,dw$$

siendo $dr = 0$ y completando tasa de cambio,

$$\frac{d\left(\frac{r}{w}\right)}{\frac{r}{w}} = -\frac{dw}{w}$$

Ante esa variación porcentual en $\frac{r}{w}$ se producirá una variación porcentual en $\frac{L}{K}$ que será tanto mayor cuanto mayor sea la elasticidad de sustitución entre factores[29]. Dada la variación en L/K, los porcentajes de variación de L y de K dependen de y_w,

---

[28] El símbolo κ Bronfenbrenner es la participación del factor en el costo total (o sea, el y_w de la expresión (1))

[29] $$\frac{dL}{L} = -\frac{dK}{K} = \sigma\left(\frac{dr}{r} - \frac{dw}{w}\right)$$

$$\frac{d\left(\frac{L}{K}\right)}{dL}=\frac{K-\frac{\partial L}{\partial K}L}{K^2}$$

como $-\frac{\partial K}{\partial L}=\frac{f_L}{f_K}=\frac{w}{r}$

$$\frac{d\left(\frac{L}{K}\right)}{dL}=\frac{1}{K}+\frac{L}{K^2}\frac{w}{r}=\frac{L}{K}\left(\frac{1}{L}+\frac{w}{Kr}\right)=\frac{L}{K}\left(\frac{Kr+wL}{Kr}\right)\frac{1}{L}$$

y, utilizando $y_w=\frac{wL}{wL+rK}$, resulta

$$\frac{dL}{L}=(1-y_w)\frac{d\left(\frac{L}{K}\right)}{\frac{L}{K}} \tag{20}$$

Similarmente se obtiene,

$$\frac{dK}{K}=-y_w\frac{d\left(\frac{L}{K}\right)}{\frac{L}{K}} \tag{21}$$

De las expresiones (20) y (21) resulta que ante una variación dada en $\frac{L}{K}$ la variación porcentual de L (K) será tanto menor (mayor) cuanto mayor (menor) sea y_w.

La secuencia entonces es la siguiente: dada una disminución porcentual en w, el precio relativo r/w aumenta en la misma proporción; como consecuencia $\frac{L}{K}$ aumenta, siendo el aumento porcentual tanto mayor cuanto mayor sea σ; dado el aumento porcentual en $\frac{L}{K}$ el aumento en L será tanto menor cuento mayor sea y_w. *Por consiguiente, dado todo lo demás, cuanto mayor sea la participación en el costo total de un factor, más inelástica será la demanda derivada por ese factor.*

Queda por analizar con más detalle la relación entre la variación porcentual en $\frac{L}{K}$ y la variación porcentual en L (y K). Ante una misma variación porcentual en $\frac{L}{K}$, el ajuste se logrará tanto más a través de L cuanto menos intensiva en L sea la tecnología; en el caso contrario, el ajuste será fundamentalmente a través de la utilización de K. La intensidad de uso de trabajo es medida por y_w.

Esta es una explicación relevante para el caso donde la tercera ley de Marshall no se cumple. La posibilidad de excepción será tanto mayor cuanto más intensiva en el factor

cuyo precio ha variado sea la tecnología. Esta explicación es más general que la dada por Robertson según la interpretación de Bronfenbrenner, pues permite considerar las excepciones a la tercera ley Marshalliana tanto en el caso de funciones de producción con elasticidad de sustitución variable como en el caso de funciones de producción con elasticidad de sustitución constante[30].
Las relaciones anteriores pueden visualizarse con más facilidad con ayuda del Gráfico Nº 4. Supónganse dos isocuantas que corresponden a dos tecnologías distintas, C y D, con igual elasticidad de sustitución; las variaciones porcentuales de $\frac{L}{K}$ y de $-\frac{dL}{dK}=\frac{r}{w}$ se suponen las mismas que entre P y P´ (isocuanta C) y entre P y P´´ (isocuanta D).

La isocuanta D es más intensiva en trabajo que C; por ejemplo en el punto P, para una misma relación $\frac{L}{K}$, $\frac{dL}{dK}=\frac{f_K}{f_L}$ es mayor en C que en D; por consiguiente, como la productividad marginal del capital en relación a la del trabajo es mayor en C que en D, C es intensiva en capital (D es intensiva en trabajo).[31]

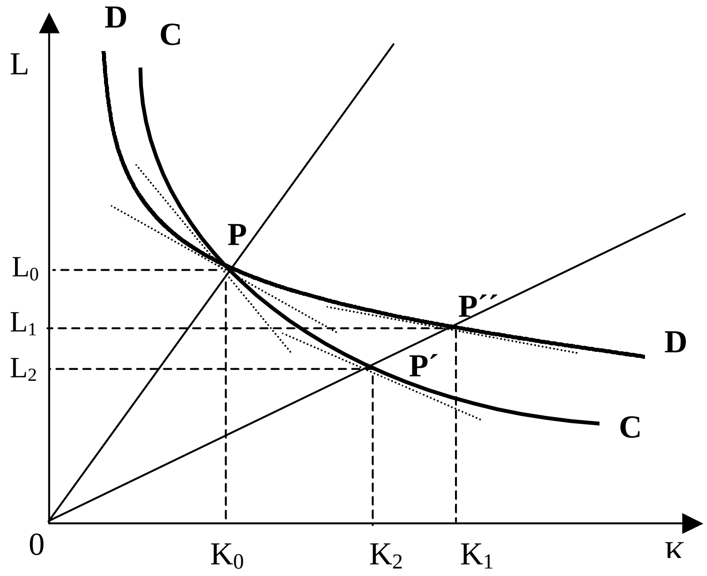
Con los supuestos mencionados, ante una variación en w, tanto en C como en D se origina la misma variación porcentual en r/w y el $\frac{L}{K}$; pero la variación porcentual en L será menor cuanto más intensiva en L sea la tecnología (dada la variación porcentual en w, el cambio porcentual en L es $\frac{L_0L_1}{L_0 0}$ en D que es menor que $\frac{L_0L_2}{L_0 0}$ en C).

---

[30] Por ejemplo, si se trata de una función con elasticidad de sustitución constante (C.E.S., que como caso particular puede ser una Cobb-Douglas con $\sigma=1$) donde el efecto Robertson-Bronfenbrennner es nulo- por ser σ constante, se verifica no obstante la excepción en la tercera ley, que puede ser explicada solo en los términos dados en el texto. En el caso más simple, considerando $\varepsilon \rightarrow \infty$ y $\eta = 0$ y dada la función de producción Cobb-Douglas, $q = AL^{\alpha}K^{(1-\alpha)}$, la elasticidad de la demanda derivada por el factor L es, , $\lambda_L = -\frac{\partial L}{\partial w}\frac{w}{L} = (1-\alpha)$, siendo $\alpha = y_w$. Derivando con respecto a α se obtiene, $\frac{\partial \lambda_L}{\partial \alpha} = -1$, o sea, la excepción a la tercera ley de Marshall: cuanto más intensiva en L sea la tecnología (o, según la formulación más tradicional, cuanto mayor sea la participación de un factor en el costo total) más inelástica será la demanda derivada por ese factor.

[31] En el Gráfico Nº4, a partir del punto P, un incremento del 1% en K libera un porcentaje mayor de L en la tecnología C que en D; por consiguiente, D es intensiva en trabajo. Si la tecnología D es intensiva en L, una misma disminución de $\frac{L}{K}$ se logrará a través de una menor caída en L y un mayor incremento en K comparada con la tecnología C, que es intensiva en K, en la que el ajuste se da a través de una mayor caída en L y un menor incremento en K.

Gráfico Nº4



6.6. CUARTA LEY DE MARSHALL

La empresa representativa del Gráfico Nº1, ante una variación en w ajusta su utilización del factor L. Este ajuste implica, si $f_{KL} > 0$ (que es el caso general), que la utilización de K aumenta ante la disminución de w (sí $f_{KL} < 0$ el uso de K disminuye).[32]

Si todas las firmas reaccionan aumentando (disminuyendo) la utilización de K, la demanda de K en el mercado aumentará (disminuirá): esto normalmente aumentará (disminuirá) su precio y este aumento (disminución) de precio hará que el incremento (disminución) de K sea menor que antes; ese menor incremento significa ubicarse en una curva más baja de valor de productividad marginal de L y, por consiguiente, un incremento en L menor que si el precio del factor cooperante no se hubiera modificado.

En el Gráfico Nº 5, 0, 0´y 0´´ son tres curvas alternativas de oferta del factor cooperante; d_0 es la curva inicial de demanda; $r_0 - K_0$ es la combinación inicial precio - cantidad de equilibrio. Si w disminuye a w_1 y, como consecuencia, d_0 se desplaza a d_1, se ajustará el precio y la cantidad de K según la elasticidad de oferta del factor cooperante.

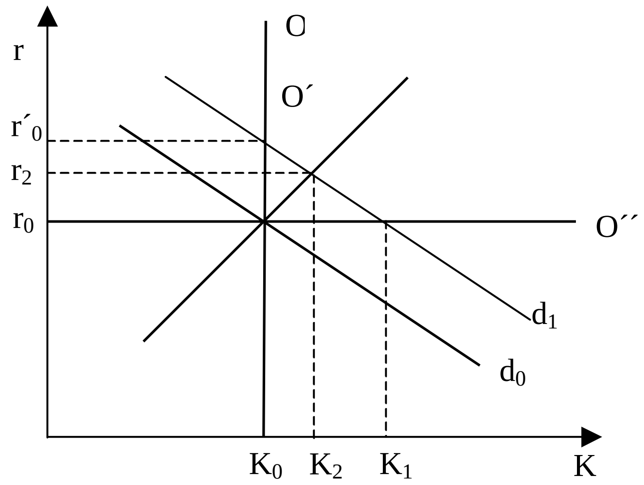
Si $\varepsilon \to \infty$ la cantidad ocupada pasará de K_0 a K_1 manteniéndose constante el precio; si $\varepsilon = 0$, la cantidad permanecerá inalterada en K_0 y el ajuste se hará exclusivamente por la vía del precio que pasará de r_0 a $r_0^{/}$; si $0 < \varepsilon < \infty$, el ajuste se logra tanto a través de un incremento del precio como de la cantidad (por ejemplo el par $r_2 - K_2$ en el Gráfico Nº 5), si r no se modifica ($\varepsilon \to \infty$), como en el Gráfico Nº 1, la curva de demanda AD

[32] Se vio antes, al analizar el Gráfico Nº 1, que al variar K la curva de valor del producto marginal de L se desplaza hacia la derecha tanto si f_{KL} es positiva como si es negativa.

no cambia; si el precio de K sube la curva relevante de valor de la productividad marginal de L para w_1 estará más abajo que $pf_L(K_1)$ y la curva de demanda se desplazará hacia la izquierda; la cantidad resultante de L para w_1 estará más próxima a D cuanto mayor sea ε y más próxima a C cuanto más inelástica la oferta del factor cooperante[33]/[34].

Esta es la cuarta Ley de Marshall que, como se vió en el punto 1, es universalmente válida- ver expresión (5).

Gráfico Nº 5



[33] Si d_0 se desplaza hacia la izquierda $f_{KL} < 0$ también se ajustará el precio y la cantidad en función de la elasticidad de la oferta del factor K.

[34] La variación de r modifica, además, las curvas de costo marginal de las firmas, afectando de ese modo la oferta del bien.

NOTA SOBRE LA DISTRIBUCIÓN DEL INGRESO EN UN MODELO NEOCLÁSICO DE UN SECTOR. COMPARACIÓN CON EL MODELO RICARDIANO

7. NOTA SOBRE LA DISTRIBUCIÓN DEL INGRESO EN UN MODELO NEOCLÁSICO DE UN SECTOR. COMPARACIÓN CON EL MODELO RICARDIANO[35]

7.1. LAS LEYES QUE GOBIERNAN LA DISTRIBUCIÓN DEL INGRESO DE UN MODELO NEOCLÁSICO DE UN SECTOR

En su libro “The Theory of wages”, J. R. Hicks presentó un modelo de un sector y dos factores productivos con la finalidad de analizar las variaciones en la distribución del ingreso - absoluta y relativa- ante “progreso económico” provocado por acumulación de factores y cambio tecnológico.

En el modelo, las condiciones de producción están representadas por

$$X = f(L, K)$$

función que se supone homogénea de grado uno –rendimientos constantes a escala – por lo que puede rescribirse

$$X = Kg(\rho) \qquad (1)$$

donde X es el producto, K es la cantidad del factor capital, $\rho = \frac{L}{K}$ es la relación media trabajo-capital y g es la función que describe el comportamiento del producto por máquina ante cambios en la cantidad de trabajadores por máquina. Las productividades marginales son positivas $(g' > 0, g - g'\rho > 0)$ y decrecientes $(g'' < 0)$ para ambos factores.

Se supone competencia perfecta, de modo que los factores son remunerados según su productividad marginal

$$w = g' \qquad (2)$$

$$r = g - g'\rho \qquad (3)$$

donde w y r son, respectivamente, el salario y la renta del capital, ambos en términos del producto.

Las ofertas de los dos factores se suponen perfectamente inelásticas ($L=L_0$, $K=K_0$).
Las participaciones absolutas y relativas en el ingreso, vienen dadas por

$$Y_w = wL = g'L \qquad (4)$$

$$Y_r = rK = (g - g'\rho)K \qquad (5)$$

$$\alpha = \frac{wL}{rK} \qquad (6)$$

[35] Revisión de la nota de clase “Nota sobre la Distribución del Ingreso en un Modelo Neoclásico de un Sector”, A. Porto, Cuadernos, Nº 34, UNLP, La Plata, Julio de 1980.

Las “leyes” de la distribución del ingreso enunciados por Hicks son[36]:

1) Un incremento en la oferta de cualquier factor de la producción incrementará la participación absoluta de ese factor si la elasticidad de la demanda por el mismo es mayor que la unidad.
2) Un incremento en la oferta de cualquier factor siempre incrementará la participación absoluta del otro factor.
3) Un incremento en la oferta de cualquier factor incrementará su participación relativa si la elasticidad de sustitución es mayor que la unidad.

7.1.1. Demostración gráfica de las “leyes” que gobiernan la distribución del ingreso

1) La situación de equilibrio inicial está representada en los gráficos Nº1 a 3 con los subíndices cero correspondientes a cada variable. El gráfico Nº1 representa la situación en el mercado del factor L y el gráfico Nº2, la correspondiente al factor K .f_L (L,K_0) y f_K (K,L_0) son las curvas de productividad marginal de L y K, respectivamente, dibujadas para $K=K_0$ y $L=L_0$. El gráfico Nª3 representa la relación tecnológica entre precio relativo de los factores (igual a la tasa marginal de sustitución) y la utilización media de factores; la pendiente negativa indica que ante un aumento en L/K el precio relativo del trabajo disminuye. Dadas L_0/K_0 queda determinado el precio relativo w_0/r_0 .

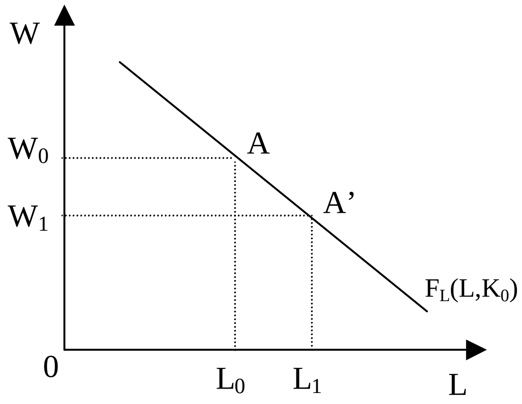


Gráfico Nº1

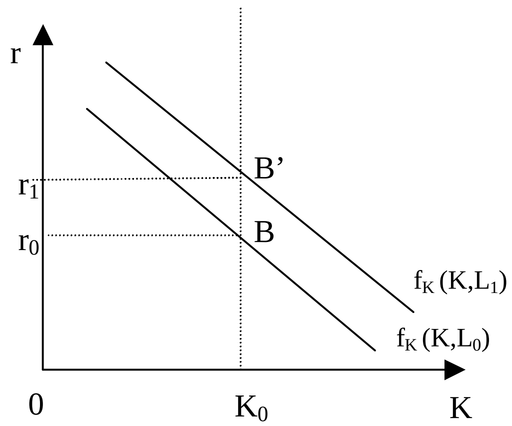


Gráfico Nº2

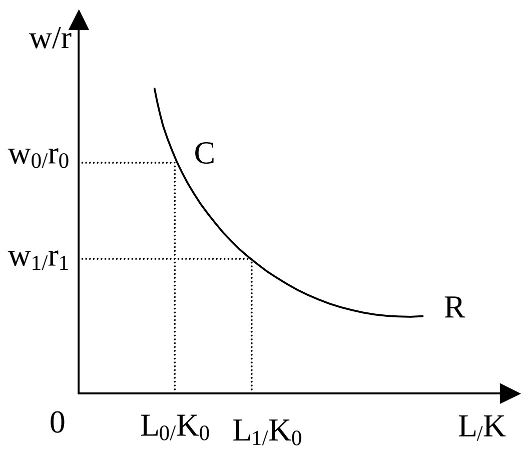


Gráfico Nº3

[36] J. R. Hicks, págs 114/120. La demostración matemática de los efectos de los cambios en las dotaciones de factores y del cambio tecnológico, en el modelo de un sector, puede consultarse en A. Porto (1977).

Las participaciones absolutas en el ingreso, en la situación inicial, son $0w_0AL_0$ (Gráfico Nº1) para el factor L y $0r_0BK_0$ (Gráfico Nº2) para el factor K; la participación relativa es igual a $0\frac{w_0}{r_0}C\frac{L_0}{K_0}$ (Gráfico Nº3).

Supóngase ahora que aumenta la dotación del factor trabajo de L_0 a L_1; como K permanece constante, la curva de productividad marginal de L no se modifica; por consiguiente, el salario disminuye de w_0 a w_1. Lo que ocurra con la participación absoluta de L (que ahora viene dada por $0w_1A´L_1$) depende de la elasticidad de la curva de demanda derivada de L; aumentará si la elasticidad es mayor que la unidad, permanecerá constante si es igual a la unidad y disminuirá si la elasticidad es inferior a la unidad.

En el gráfico Nº2 no se modifica K_0 pero como L aumentó de L_0 a L_1, la curva de productividad marginal de K se desplaza hacia arriba; por consiguiente, la remuneración unitaria aumenta de r_0 a r_1 y la participación absoluta de $0r_0BK_0$ a $0r_1B´K_0$.

En el gráfico Nº3 se pasa de $\frac{L_0}{K_0}$ a $\frac{L_1}{K_0}$; el precio relativo del trabajo disminuye de $\frac{w_0}{r_0}$ a $\frac{w_1}{r_1}$.

Lo que ocurra con la participación relativa depende de la elasticidad de la curva R: la participación relativa del factor cuya oferta se expande aumenta, permanece constante o disminuye según que la elasticidad de sustitución sea mayor, igual o menor que la unidad[37].

2) Un caso de interés es aquel en el que las dotaciones de los factores se expanden en la misma proporción. La situación inicial se representa en los gráficos Nª4 a 6 con los subíndices cero `para las distintas variables.

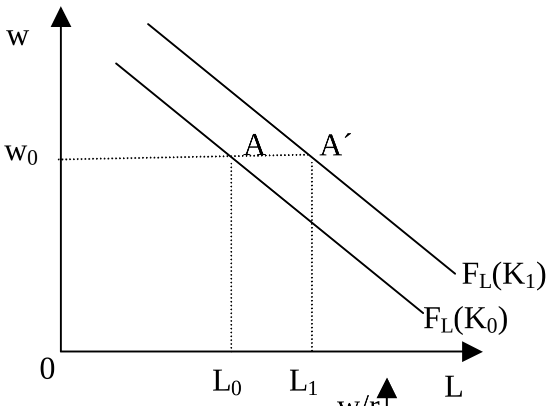


Gráfico Nº4

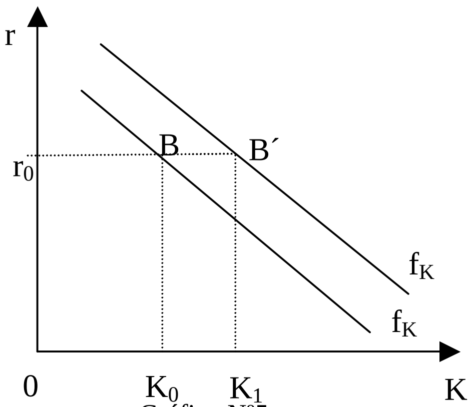


Gráfico Nº5

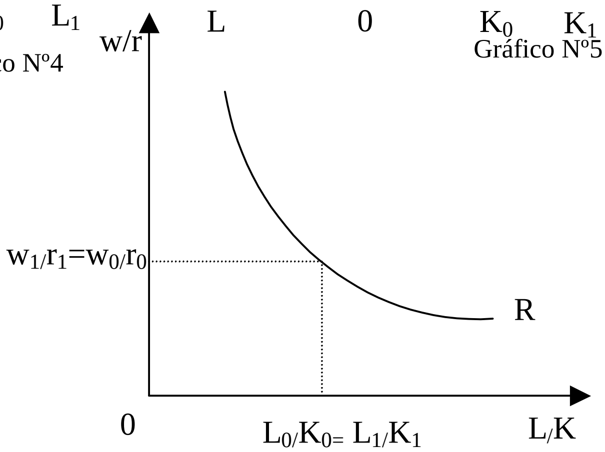


Gráfico Nº6

---

[37] La elasticidad de la curva R es la elasticidad de sustitución entre los factores.

En el gráfico Nº6 es claro que nada se altera: al expandirse los dos factores en la misma proporción, $\frac{L}{K}$ no se modifica (resulta $\frac{L_1}{K_1} = \frac{L_0}{K_0}$) ; como la tasa marginal de sustitución (igual al precio relativo de los factores) es función de la proporción $\frac{L}{K}$, tampoco se modifica (resulta $\frac{w_1}{r_1} = \frac{w_0}{r_0}$); por consiguiente, si los dos factores se expanden en la misma proporción, la distribución relativa del ingreso permanece invariable.
Como la función de producción es homogénea de grado uno, el valor absoluto de la productividad marginal de cada factor es función solo de la proporción $\frac{L}{K}$, por consiguiente como $\frac{L}{K}$ no varía tampoco lo hacen w y r. Las funciones f_L y f_K se desplazan a la derecha. La situación final de equilibrio se representa en los gráficos Nº 4 y 5 con los subíndices uno; las participaciones absolutas de los dos factores aumentan en la misma proporción.

7.2. EJERCICIOS Y EFECTOS DEL CAMBIO TECNOLÓGICO EN EL MODELO NEOCLÁSICO

1. Demuestre que si la función de producción es homogénea de grado uno y las productividades marginales de ambos factores positivos y decrecientes, la derivada segunda cruzada (f_{LK}) es positiva – esto significa que si aumenta K, f_L se desplaza a la derecha y lo mismo ocurre con f_K ante aumento en L.

2. A partir de la ecuación (2) demuestre que la elasticidad de la demanda derivada por el factor L viene dada por la expresión

$$\lambda L = -\frac{\partial L}{\partial w}\frac{w}{L} = \frac{\sigma}{1-yw} \qquad (7)$$

Siendo y_w la participación del factor L en el costo total y σ la elasticidad de sustitución entre los factores [38].

3. Demuestre que

$$\frac{dy_w}{y_w} = (1-\frac{1}{\lambda_L})\frac{dL}{L} + \frac{1}{\lambda_L}\frac{dK}{K} \qquad (8)$$

y verifique el cumplimiento de las tres primeras “leyes” de Hicks.

4. Para analizar los efectos del cambio tecnológico se introducen en la función de producción los parámetros λ y λ', de modo que se rescribe

$$X = f(\lambda L, \lambda' K)$$

y en términos de proporción media de uso de factores – dado que para valores de λ y λ' la función se supone homogénea de grado uno-,

---

[38] En el modelo de la sección 1 no existe influencia del lado de la demanda- la elasticidad de la demanda por el único bien es infinita: se supone además que las ofertas de factores son perfectamente inelásticas. Con estos supuestos y partiendo de la fórmula de Hicks de la elasticidad de la demanda derivada, hallar la expresión (7).

$$X = \lambda' K g(\rho \frac{\lambda}{\lambda'}) \qquad (9)$$

inicialmente $\lambda = \lambda` = 1$. Si $d\lambda > 0$, el mismo nivel de producción puede obtenerse con la misma cantidad de capital que antes, pero con menor cantidad de trabajo; si $d\lambda' > 0$, el nivel original de producción se obtiene con la misma cantidad de trabajo y menos capital; si $d\lambda = d\lambda' > 0$, el nivel original de producción se obtiene con una reducción proporcional de los dos factores. Por consiguiente $d\lambda > 0$, representa un cambio "ahorrador de trabajo"; $d\lambda' > 0$ uno "ahorrador de capital" y $d\lambda = d\lambda' > 0$, un cambio tecnológico "neutral".

Hallando el diferencial de (9) con respecto a L y λ y completando tasas de cambio, se obtiene

$$\frac{dX}{X} = y_w (\frac{dL}{L} + \frac{d\lambda}{\lambda}) \qquad (10)$$

y si $\frac{dX}{X} = 0$, entonces,

$$-\frac{dL}{L} = \frac{d\lambda}{\lambda}$$

O sea, un cambio tecnológico ahorrador de L es similar a una expansión de L. Igual relación puede demostrarse para las variables y_w, y_r, α y para el factor K y el cambio tecnológico ahorrador de K. Pueden, por consiguiente, formularse las siguientes "leyes" de la distribución del ingreso ante un cambio tecnológico.

1) Ante un cambio tecnológico ahorrador de un factor se incrementará la participación absoluta de ese factor si la elasticidad de la demanda derivada por el mismo es mayor que la unidad.

2) Un cambio tecnológico ahorrador de un factor, siempre incrementará la participación absoluta del otro factor.

3) Un cambio tecnológico ahorrador de un factor incrementará su participación relativa si la elasticidad de sustitución es mayor que la unidad.

Cuando existe expansión en las dotaciones de factores, las participaciones relativas quedan inalteradas en dos casos: a) cuando la elasticidad de sustitución es igual a uno, b) cuando los factores se expanden a la misma tasa. Cuando existe cambio tecnológico las participaciones relativas quedan inalteradas cuando se cumple a), o cuando b) el cambio tecnológico es neutral.

7.3. EL MODELO RICARDIANO DE UN SECTOR[39]

El modelo Ricardiano de un sector se representa con una función de producción similar a (1). L es la cantidad de trabajo y K la de tierra, que se supone fija. El capital (C) es, en el modelo más simple, capital circulante que permite anticipar el salario de los trabajadores. La cantidad de C está dada al comienzo del período de producción. y_r en (5) es la participación absoluta de los terratenientes e y_w en (4) la participación absoluta de trabajadores *más* capitalistas; α es la participación relativa de asalariados *más* capitalistas en relación a la de los terratenientes. Estas tres variables se rigen para el principio marginal y se aplican las leyes de Hicks.

[39] Ver Porto (1976)

El producto marginal del trabajo (g´) se distribuye entre asalariados –que perciben el salario de subsistencia $\bar{x}$ – y los capitalistas que reciben el excedente $(g´-\bar{x})$

El beneficio total (B) de los capitalistas es

$$B = (g´-\bar{x})L$$

y la tasa de beneficio

$$\frac{B}{C} = \frac{g´-x}{x} \qquad (11)$$

donde C es el capital circulante o fondo de salarios. La cantidad de trabajadores ocupados resulta de $C = xL$, que es una hipérbola equilátera que da las combinaciones posibles de x y L, dado C.

La expresión (11) es la relación entre el trabajo que excede al mínimo de subsistencia de los trabajadores $(g´-\bar{x})$ y ese mínimo $\bar{x}$. En términos marxistas, es la relación entre el trabajo excedente y el trabajo necesario.

En el gráfico Nº 7 se representa el modelo.

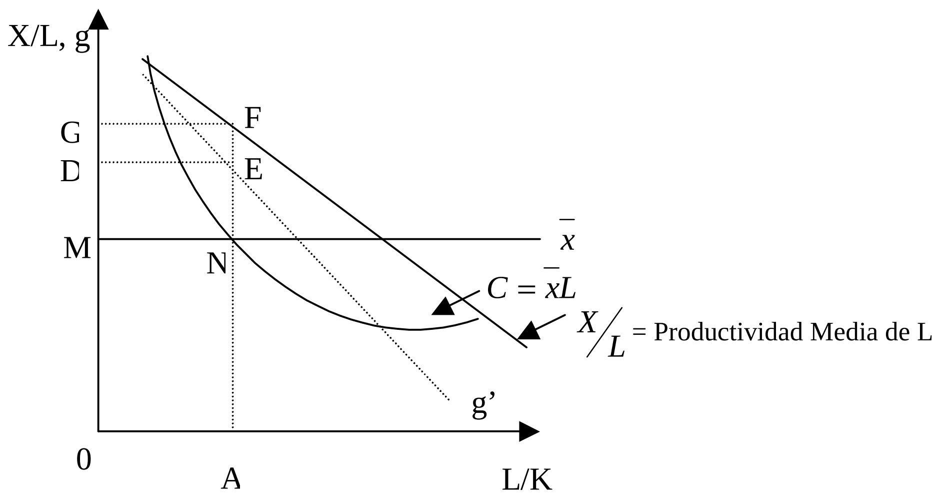


Gráfico Nº7

Dadas C y $\bar{x} = OM$, se determina L=0A. El producto total es 0AFG; $y_r = \text{DEFG}$; $y_w = 0\text{AED}$; B=MNED; $W = C = \bar{x}L = 0ANM$ (W= participación absoluta de los asalariados).

7.4. Problema en el Modelo Ricardiano

1. Demostrar que si $\sigma \leq 1$, al aumentar la cantidad de capital con $\bar{x}$ constante, la participación relativa de los capitalistas en el ingreso disminuye.
2. Demostrar que si $\sigma > 1$, la participación relativa de los capitalistas en el ingreso sólo aumenta si $\sigma > \frac{g´}{g´-x} > 1$

NOTA SOBRE LA FUNCIÓN DE TRANSFORMACIÓN

8. NOTA SOBRE LA FUNCIÓN DE TRANSFORMACIÓN[40]

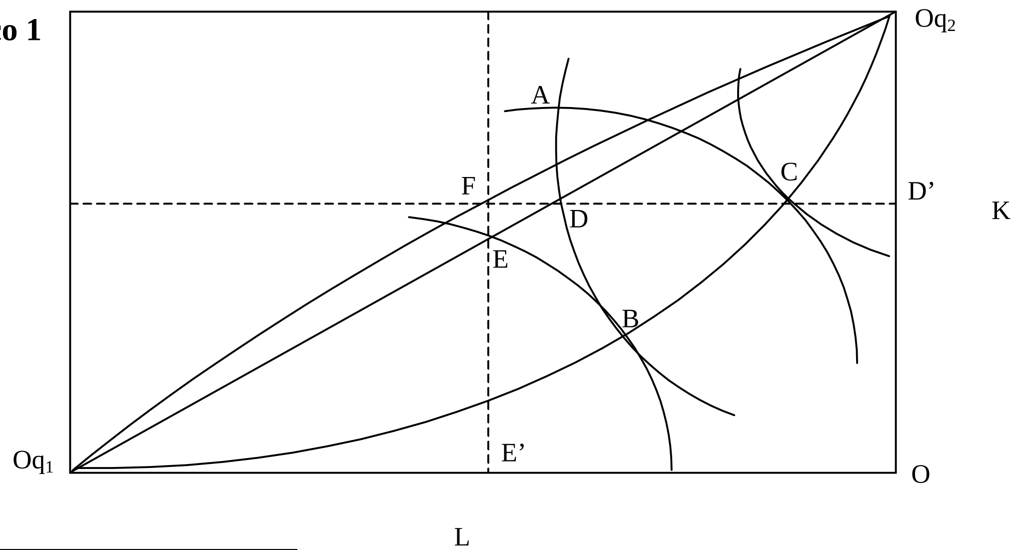
8.1. INTRODUCCIÓN

En un modelo de dos bienes, la función de transformación expresa la cantidad máxima de un bien que es posible producir para cada cantidad del otro bien, dadas las dotaciones de factores y la tecnología disponible. El objetivo de esta nota es estudiar gráfica, analítica y conceptualmente la forma de la función de transformación bajo los supuestos más simples: se producen dos bienes (q_1, q_2), con dos factores (L, trabajo y K, capital); la oferta de ambos factores es perfectamente inelástica; las funciones de producción son homogéneas de grado uno, o sea los rendimientos son constantes a escala; no existen ni economías ni deseconomías externas.

8.2. OBTENCIÓN GRÁFICA DE LA FUNCIÓN DE TRANSFORMACIÓN Y ANÁLISIS DE SU FORMA

El gráfico Nº1 presenta un diagrama de caja de Edgeworth – Bowley; las dimensiones horizontal y vertical de la caja representan las dotaciones fijas de los factores L y K, respectivamente. Las isocuantas para el bien q_1 son medidas con origen $0q_1$ y las del bien q_2 con origen en $0q_2$; se supone que el bien q_1 es intensivo en trabajo y el bien q_2 en capital. Cualquier punto en el interior de la caja representa una asignación de los factores L y K a las dos producciones; cualquier movimiento de un punto a otro de la caja representa una reasignación de los factores entre las dos producciones. A partir de cualquier punto de la caja en el que se corten dos isocuantas pueden obtenerse otros puntos que representan niveles de producción más altos por lo menos para uno de los bienes; esos puntos son los situados en el lado cóncavo de las dos isocuantas que se cortan. Por ejemplo, a partir de A todos los puntos ubicados entre ADB y AC. Existen otros puntos donde no pueden efectuarse movimientos que permitan aumentar la producción de un bien sin disminuir la del otro: son aquellos que definen la curva de óptimos dentro de la caja, caracterizadas por la tangencia de las isocuantas de q_1 y q_2; por ejemplo, los puntos B y C. En el gráfico, la curva de óptimos es $0q_1$ BC$0q_2$.

Gráfico 1



[40] Revisión de la Nota escrita en julio de 1980 que con el mismo título se publicó en Cuadernos, Nº 34, FCE, UNLP, La Plata, Septiembre de 1982.

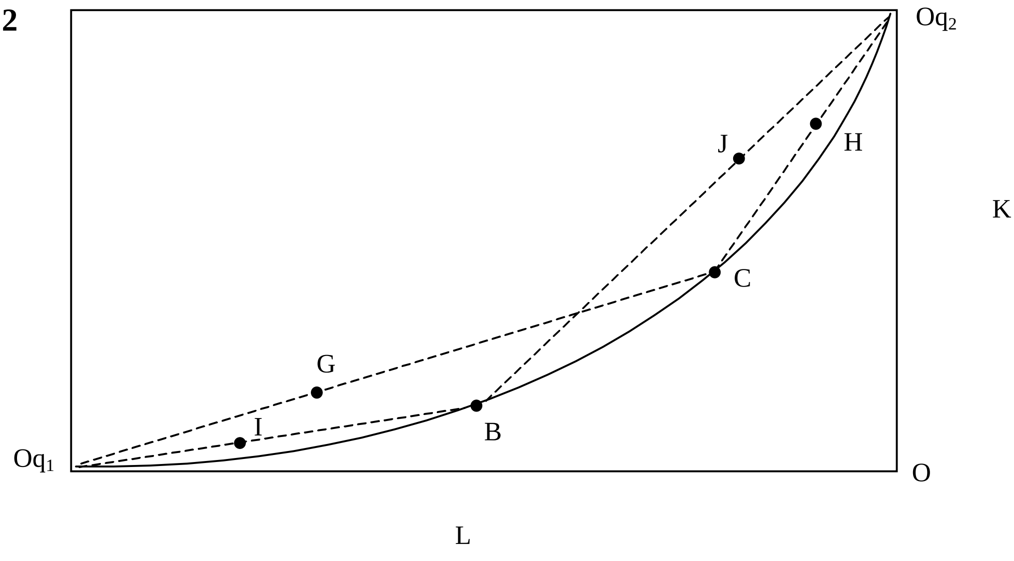
Usando la técnica de Savosnik (1958), las unidades de los dos bienes pueden ser definidas de modo tal que las cantidades producidas en cada punto de la curva de óptimos pueden ser medidas por las distancias de los respectivos orígenes hasta los puntos donde las respectivas isocuantas cortan a la diagonal de la caja $0q_1ED0q_2$. Por ejemplo, en el punto B las producciones representadas por las isocuantas EB y ADB se miden por las distancias $0q_1D$ para el bien q_1 y Oq_2E para el bien q_2. Estas medidas pueden ser transferidas a los lados de la caja por medio de las líneas DD´ y EE´; OD´ representa la cantidad producida del bien q_1 y 0E´ la cantidad producida del bien q_2. F es un punto de la función de transformación dibujada con referencia al origen 0 – las cantidades de q_1 medidas verticalmente a partir de 0 y las cantidades de q_2 medidas horizontalmente, hacia la izquierda a partir de 0. Por construcción, todos los puntos de la función de transformación se ubican al nordeste de la diagonal $0q_1ED0q_2$ siendo, en consecuencia, la función de transformación cóncava hacia el origen 0. En particular, el punto $0q_2$ representa la situación donde sólo se produce el bien q_1 (en una cantidad igual a $0.0q_2$) y en el punto $0q_1$ la situación donde solo se produce q_2 (en una cantidad igual a $0.0q_1$). $0q_1F0q_2$ es la función de transformación.

Surge claro, con el método utilizado, que en el caso de producción con igual intensidad de uso de factores, la función de transformación resultante será una línea recta.

8.3. DEMOSTRACIÓN GRÁFICA ALTERNATIVA DE LA CONCAVIDAD DE LA FUNCIÓN DE TRANSFORMACIÓN[41]

En el gráfico 2 se reproduce la situación analizada en el punto anterior; $0q_1BC0q_2$ es la curva de óptimos.

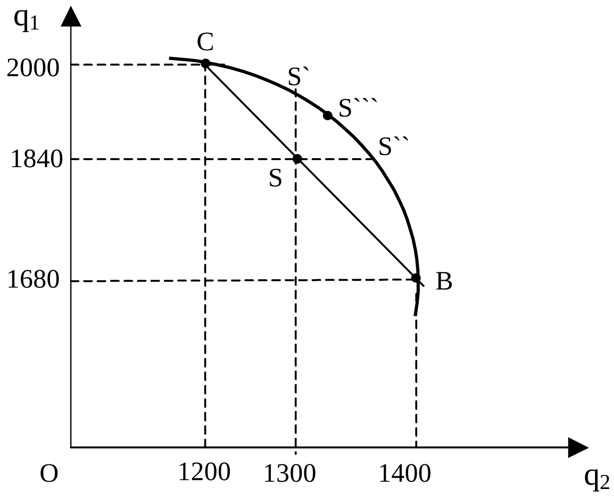
Gráfico 2



Se seleccionan dos puntos sobre la curva de óptimos, por ejemplo, B y C y se representan en el gráfico 3; por definición, esos puntos pertenecen a la función de transformación. Supóngase que en C, es $q_1=2000$ y $q_2=1200$; y en B, $q_1=1680$ y $q_2=1400$.

[41] Esta demostración está tomada de R. Findlay (1970).

Gráfico 3



Supóngase ahora que se produce la mitad de las cantidades correspondientes al punto C sin alterar las proporciones de factores. En esas condiciones, se producirán q_1=1000 y q_2=600, exactamente con la mitad de los factores que se usaban antes (se estaría en los puntos G y H). Del mismo modo, supóngase que se produce la mitad de las cantidades correspondientes al punto B sin alterar las proporciones de factores; se producirán q_1=840 y q_2=700, nuevamente con exactamente la mitad de los factores que se usaban antes en B (se estaría en los puntos I y J). En esa situación existiría pleno empleo de ambos factores y se obtendrían 1840 unidades de q_1 y 1300 unidades de q_2. Corresponde localizar ahora el punto q_1=1840, q_2= 1300 en el gráfico 3.

La ecuación de la recta que pasa por los puntos C y B del gráfico 3 es,

$$q_1 - q_{1C} = \frac{q_{1B} - q_{1C}}{q_{2B} - q_{2C}}(q_2 - q_{2C})$$

reemplazando valores es,

$$q_1 - 2000 = \frac{1680 - 2000}{1400 - 1200}(q_2 - 1200)$$

y reordenando

$$q_1 = 3920 - 1{,}6q_2$$

El punto q_1=1840 y q_2=1300, designado con S, está sobre la línea recta que une los puntos B y C en el diagrama de productos. De esta forma se demuestra que la función de transformación no será convexa hacia el origen. Queda por demostrar que con los supuestos adoptados, será necesariamente cóncava. Considérese el punto S del gráfico 3; las 1840 unidades de q_1 son producidas en los puntos G (1000 unidades) e I (840 unidades) del gráfico 2; las 1300 unidades de q_2 son producidas en los puntos H (600 unidades) y J (700 unidades) del gráfico 2. Cada bien se produce con dos técnicas distintas, en las que las proporciones de factores son diferentes; como las tasas marginales de sustitución entre factores son función de las proporciones de factores, diferirán en las dos técnicas, no cumpliéndose la condición de eficiencia.

Adicionalmente, tampoco se igualan las tasas marginales de sustitución entre factores correspondientes a las producciones de los dos bienes. Por consiguiente, el punto S no es eficiente. Los factores ahorrados con la reasignación se pueden destinar a producir más de un bien sin disminuir la cantidad del otro (puntos S´o S´´ del gráfico 3) o a aumentar la producción de ambos bienes (como, por ejemplo, en el punto S´´´). Uniendo C S´S´´´S´´B, la curva resultante – la función de transformación – es cóncava vista desde el origen.

El punto S se puede localizar en el gráfico 2 utilizando la regla del paralelogramo. El punto se ubica en la línea recta que une By C, que forma los paralelogramos con rectas a partir de los puntos I y G (para q_1) y J y H (para q_2).[42]

También con ese método resulta claro que si las funciones de producción tienen igual intensidad de uso de los factores, la función de transformación resultante será una línea recta.

8.4. DEMOSTRACIÓN ANALÍTICA DE LA CONCAVIDAD DE LA FUNCIÓN DE TRANSFORMACIÓN

El modelo neoclásico de equilibrio general - lado de la producción- puede representarse con el siguiente sistema de ecuaciones[43].

$$q_1 = L_1 g_1(\rho_1) \quad (1)$$
$$q_2 = L_2 g_2(\rho_2) \quad (2)$$
$$g'_1 = \pi g'_2 \quad (3)$$
$$g_1 - g'_1 \rho_1 = \pi(g_2 - g'_2 \rho_2) \quad (4)$$
$$L_1 + L_2 = L \quad (5)$$
$$\rho_1 L_1 + \rho_2 L_2 = K \quad (6)$$

Las ecuaciones (1) y (2) son las funciones de producción de los dos bienes; como existen rendimientos constantes a escala, el nivel de la producción de cada bien (q_i) es función de la utilización media capital- trabajo $\rho_i = \frac{K_i}{L_i}$ y de un factor de escala L_i, que es la cantidad de trabajo asignada al sector i. Se supone que las productividades marginales son positivas y decrecientes para ambos factores, o sea, $g'_i > 0$, $g_i - g'_i \rho_i > 0$, $g''_i < 0$.

Las ecuaciones (3) y (4) constituyen una forma de representar las condiciones marginales para estar sobre la curva de óptimos en el diagrama de caja: dividiendo miembro a miembro resulta la igualdad de las tasas marginales de sustitución entre

---

[42] Agradezco a Gonzalo Javier Sereno, alumno de la Maestría en Economía (2005) su sugerencia de agregar esta demostración.

[43] Para más detalles sobre el modelo completo de equilibrio general neoclásico ver H. L. Dieguez y A. Porto (1972). En H. L. Dieguez (1971) puede encontrarse un análisis riguroso de la relación entre la función de transformación y las funciones de producción que le dan origen; el análisis se efectúa para funciones de producción de cualquier grado de homogeneidad.

factores de las dos producciones; las ecuaciones (3) y (4) expresan que cada factor es remunerado según el valor de su productividad marginal; en competencia perfecta, esa remuneración es la misma en ambos sectores; π es le precio de q_2 en términos de q_1 – bien adoptado como numerario.

Las ecuaciones (5) y (6) representan la condición de pleno empleo de ambos factores; L y K son las dotaciones fijas de trabajo y capital, respectivamente.

El modelo tiene 6 ecuaciones y 7 incógnitas: q_1, q_2, L_1, L_2, ρ_1, ρ_2, π. Considerando a π como parámetro, derivando se obtienen,

$$\frac{dq_1}{d\pi} = g_1 \frac{dL_1}{d\pi} + L_1 g'_1 \frac{d\rho_1}{d\pi} \tag{7}$$

$$\frac{dq_2}{d\pi} = g_2 \frac{dL_2}{d\pi} + L_2 g'_2 \frac{d\rho_2}{d\pi} \tag{8}$$

$$g_1'' \frac{d\rho_1}{d\pi} = g'_2 + \pi g_2'' \frac{d\rho_2}{d\pi} \tag{9}$$

$$-\rho_1 g_1'' \frac{d\rho_1}{d\pi} = (g_2 - \rho_2 g'_2) - \pi \rho_2 g_2'' \frac{d\rho_2}{d\pi} \tag{10}$$

$$\frac{dL_1}{d\pi} + \frac{dL_2}{d\pi} = 0 \tag{11}$$

$$\frac{d\rho_1}{d\pi} L_1 + \frac{dL_1}{d\pi} \rho_1 + \frac{d\rho_2}{d\pi} L_2 + \frac{dL_2}{d\pi} \rho_2 = 0 \tag{12}$$

Resolviendo, resultan,

$$\frac{d\rho_1}{d\pi} = \frac{g_2}{g_1''(\rho_2 - \rho_1)} \tag{13}$$

$$\frac{d\rho_2}{d\pi} = \frac{g_1}{\pi^2 g_2''(\rho_2 - \rho_1)} \tag{14}$$

$$\frac{dL_1}{d\pi} = -\frac{dL_2}{d\pi} = \frac{1}{(\rho_2 - \rho_1)^2} \left(\frac{g_2 L_1}{g_1''} + \frac{g_1 L_2}{\pi^2 g_2''} \right) \tag{15}$$

$$\frac{dq_1}{d\pi} = -\pi \frac{dq_2}{d\pi} = \frac{1}{(\rho_2 - \rho_1)^2} \left(\frac{\pi L_1 g_2^{\,2}}{g_1''} + \frac{L_2 g_1^{\,2}}{\pi^2 g_2''} \right) \tag{16}$$

Las expresiones (13) y (14) indican que ante un aumento en el precio relativo del bien q_2, la proporción óptima capital – trabajo disminuirá (aumentará) en ambos sectores, si el bien cuyo precio relativo aumentó es intensivo en capital (trabajo)[44].

De la expresión (15) resulta un aumento en la cantidad de trabajo asignada a la producción del bien cuyo precio relativo aumentó y una disminución de la asignada a la producción de q_1. Se expande la producción del bien cuyo precio relativo aumentó y se contrae la del otro bien – expresión (16)[45].

De la expresión (16) resulta la igualdad de la tasa marginal de transformación y el precio relativo de los bienes

$$\frac{dq_1}{dq_2} = -\pi \qquad (17)$$

De la expresión (17) resulta la pendiente negativa de la función de transformación.

Derivando (17) con respecto a q_2 se obtiene,

$$\frac{d^2 q_1}{dq_2^{\;2}} = -\frac{d\pi}{dq_2} \qquad (18)$$

Siendo $\frac{d\pi}{dq_2} > 0$ (expresión (16)) surge que la expresión (18) es negativa, o sea, la función de transformación es cóncava hacia el origen. Se demuestra también que si $\rho_2 = \rho_1$ es $\frac{d\pi}{dq_2} = 0$ y la función de transformación es una línea recta.

8.5. Demostración conceptual de la concavidad de la función de transformación

Se indagará ahora conceptualmente la razón de porqué, siendo las funciones de producción de los dos bienes de rendimientos constantes a escala, la función de transformación es cóncava hacia el origen, indicando una dificultad creciente de transformar un bien en el otro reasignando los factores productivos. El punto es que si, como se supuso antes, $\rho_2 > \rho_1$, una contracción de la producción de q_1 liberará más

[44] Ante un aumento en el precio relativo del bien q_2, aumenta la remuneración real del factor en el cual es intensivo ese bien y disminuye la remuneración real del otro factor: el precio relativo del capital en relación al del trabajo (r/w) aumenta. Como consecuencia, ambos sectores economizarán el uso del factor relativamente más caro, disminuyendo la proporción óptima capital- trabajo.

[45] Una explicación intuitiva para estos resultados es la siguiente. Al aumentar el precio relativo de un factor (en este caso r/w), aumenta el precio relativo del bien que usa en forma intensiva el factor cuyo precio relativo aumentó (o sea, π); ambos sectores economizarán el uso del factor relativamente más caro de modo que tanto ρ_1 como ρ_2 disminuirán. En este caso, para cumplir con la restricción dada por (6), como $\rho_2 > \rho_1$, L_2 debe aumentar y L_1, disminuir. Si ρ_1 y L_1 disminuyen (y, por consiguiente, K_1, que es la cantidad de capital asignada al sector q_1), dada la función de producción (1), también disminuirá q_1; a su vez, como las cantidades de los dos factores asignadas a la producción de q_2 aumentan, también lo hace q_2.

trabajo en relación a capital que la necesaria para que se expanda la producción de q_2 sin alterar la proporción de los factores. La expansión de la producción de q_2 dará lugar a que se tenga que usar más del insumo relativamente más favorable para q_1 (el trabajo). La proporción de insumos se hace de esa forma cada vez menos favorable en la producción de q_2; lo opuesto se cumple con la proporción de insumos usada en la producción de q_1. La concavidad de la función de transformación refleja entonces una dificultad creciente de transformación de un bien en el otro, debido a la necesidad de utilizar una proporción de factores cada vez más desfavorable para el bien que se expande y una cada vez más favorable para el bien que se contrae. El caso puede verse con más claridad analizando que ocurre cuando las intensidades de uso de factores son las mismas en las dos producciones; o sea, cuando $\rho_2=\rho_1$; una disminución de la cantidad de factores asignada a la producción del bien q_1, originará una expansión de la producción de q_2 sin alterar las proporciones de factores. En el caso será $dq_1 = dL_1 g_1$ y $dq_2 = dL_2 g_2$; g_1 y g_2 permanecen constantes porque ρ_1 y ρ_2 no cambian; $-dL_1 = dL_2$; por consiguiente, $\frac{dq_1}{dq_2}$ es constante.

NOTA SOBRE EL MODELO NEOCLÁSICO DE DOS BIENES Y DOS FACTORES

9. NOTA SOBRE EL MODELO NEOCLÁSICO DE DOS BIENES Y DOS FACTORES[46]

9.1. INTRODUCCIÓN

El modelo neoclásico de equilibrio general con dos bienes y dos factores productivos- lado de la producción – puede representarse con el siguiente sistema de ecuaciones.

$$q_1 = L_1 g_1(\rho_1) \tag{1}$$
$$q_2 = L_2 g_2(\rho_2) \tag{2}$$
$$r = g'_1 \tag{3}$$
$$r = \pi g'_2 \tag{4}$$
$$w = g_1 - g'_1 \rho_1 \tag{5}$$
$$w = \pi(g_2 - g'_2 \rho_2) \tag{6}$$
$$\frac{r}{w} = \frac{g'_1}{g_1 - \rho_1 g'_1} \tag{7}$$
$$L_1 + L_2 = L \tag{8}$$
$$\rho_1 L_1 + \rho_2 L_2 = K \tag{9}$$

Las ecuaciones (1) y (2) son las funciones de producción de los dos bienes; como existen rendimientos constantes a escala, el nivel de la producción de cada bien (q_i) es función de la utilización media capital- trabajo $\rho_i = \frac{K_i}{L_i}$ y de un factor de escala L_i, que es la cantidad de trabajo asignada al sector i. Se supone que las productividades marginales son positivas y decrecientes para ambos factores y que el bien q_1 es intensivo en trabajo y q_2 en capital – o sea que a un mismo precio relativo de los factores se verifica que $\rho_2 > \rho_1$.

Las ecuaciones (3) a (6) son las condiciones marginales de equilibrio- cada factor es remunerado según el valor de su productividad marginal; en competencia perfecta, esa remuneración es la misma en ambos sectores; π es le precio de q_2 en términos de q_1 – bien adoptado como numerario; w y r son las remuneraciones del trabajo y el capital, respectivamente, ambos en términos del numerario. La ecuación (7) representa el precio relativo de los factores.

Las ecuaciones (8) y (9) representan la condición de pleno empleo de ambos factores; L y K son las ofertas fijas de trabajo y capital, respectivamente.
En el modelo existen nueve ecuaciones y diez incógnitas: q_1, q_2, L_1, L_2, ρ_1, ρ_2, π,w, r, $\frac{r}{w}$.

[46] Versión actualizada de la Nota de Clase de Alberto Porto que con el mismo título se publicó en Cuadernos, Nº 34, FCE, UNLP, La Plata, Septiembre de 1982.

9.2. RELACION ENTRE PROPORCIÓN MEDIA ÓPTIMA DE USO DE FACTORES, PRECIO RELATIVO DE LOS FACTORES Y PRECIO RELATIVO DE LOS BIENES

Para el estudio de la relación entre proporción media óptima de uso de factores, precio relativo de los factores y precio de los bienes se parte de las ecuaciones (3) a (7), que pueden rescribirse

$$g'_1 = \pi g'_2 \tag{10}$$

$$g_1 - \rho_1 g'_1 = \pi(g_2 - \rho_2 g'_2) \tag{11}$$

$$\frac{r}{w} = \frac{g'_1}{g_1 - \rho_1 g'_1} \tag{12}$$

reduciéndose de ese modo a tres ecuaciones con cuatro incógnitas: ρ_1, ρ_2, π, $\frac{r}{w}$.

Derivando (10) a (12) con respecto a $\frac{r}{w}$ y resolviendo, se obtiene,

$$\frac{d\rho_1}{d\frac{r}{w}} = \frac{(g_1 - \rho_1 g'_1)^2}{g_1 g''_1} \tag{13}$$

$$\frac{d\rho_2}{d\frac{r}{w}} = \frac{(g_2 - \rho_2 g'_2)^2}{g_2 g''_2} \tag{14}$$

$$\frac{d\pi}{d\frac{r}{w}} = \frac{(g_1 - \rho_1 g'_1)^2 (\rho_2 - \rho_1)}{g_1 g_2} \tag{15}$$

Las expresiones (13) y (14) son negativas indicando que ante un aumento en el precio relativo del capital, ambos sectores economizarán el uso de ese factor disminuyendo la proporción óptima capital- trabajo[47]. En ambas producciones aumentan los costos como consecuencia del encarecimiento de un factor, pero se encarecerá relativamente más el bien que use en forma intensiva ese factor; consistente con esto, la ecuación (15) implica un aumento del precio del segundo bien en términos del primero cuando aumenta el precio relativo del capital dado que $\rho_2 > \rho_1$.

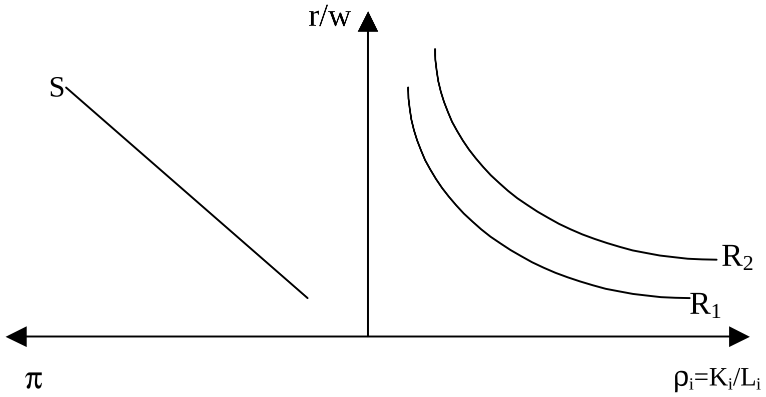
Las relaciones entre utilizaciones medias óptimas de factores, precio relativo de los factores y precio relativo de los bienes se representan en el gráfico Nº1.

---

[47] La magnitud de este efecto depende de la elasticidad de sustitución entre los factores (σ); la expresión para la elasticidad de sustitución , válida para funciones homogéneas de grado uno es

$\sigma_i = -\frac{g'_i (g_i - \rho_i g'_i)}{g_i \rho_i g''_i}$, de modo que reemplazando en (13) y (14) resulta $\frac{d\rho_i}{\rho_i} = \sigma_i \frac{d(\frac{r}{w})}{\frac{r}{w}}$

Gráfico Nº1



Las curvas R_1 y R_2 representan la relación entre utilización media óptima de factores y precio relativo de los factores; como se expresó antes, la pendiente negativa indica aumentos (disminuciones) en la relación $\frac{K}{L}$ ante disminuciones (aumentos) en $\frac{r}{w}$; R_2 está a la derecha de R_1 indicando que para cada precio relativo de los factores es $\rho_2 > \rho_1$. La parte izquierda del gráfico representa la relación precio relativo de factores- precio relativo de bienes; como $\rho_2 > \rho_1$ la curva S tiene pendiente positiva.

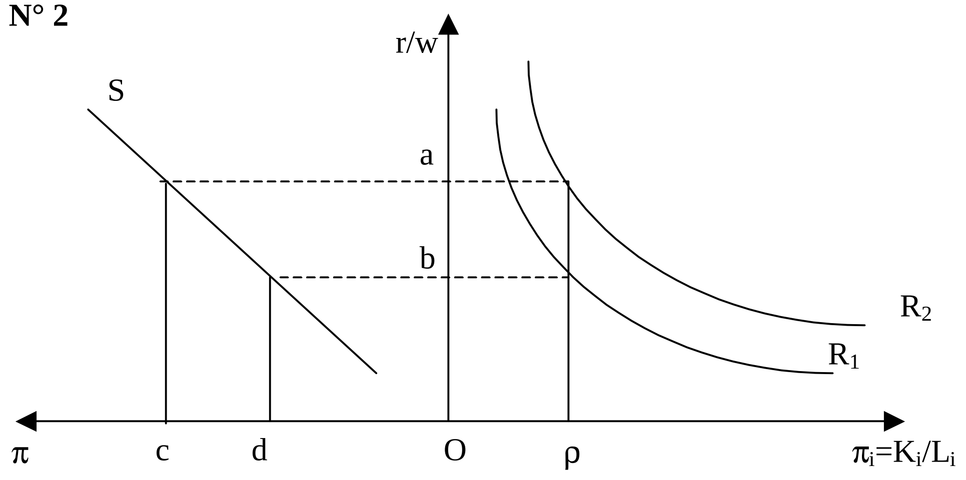
Las relaciones entre las variables, implícitas en las expresiones (10) a (12) y en el gráfico Nº1 son las factibles desde el punto de vista tecnológico, pero no todas ellas son factibles para una economía en particular, en un momento dado. En efecto, la asignación de recursos entre los dos sectores debe ser tal que se cumpa con las restricciones de recursos de la economía; las ecuaciones (8) y (9) pueden rescribirse

$$\rho_1 \frac{L_1}{L} + \rho_2 \frac{L_2}{L} = \rho \tag{16}$$

siendo, $\rho = \frac{K}{L}$; o sea, la asignación de recursos entre los dos sectores debe ser tal que la suma de las utilizaciones medias capital- trabajo en cada sector, ponderadas por la proporción de trabajo asignada a cada sector, iguale a la dotación capital – trabajo de la economía (ρ). Como casos extremos se tiene que si todos los recursos se destinan al primer sector será $\rho_1 = \rho$, y si todos se usan para producir q_2 será $\rho_2 = \rho$. Esos casos extremos determinan los límites de los intervalos factibles de variación de los precios relativos de los factores y de los bienes. Tales límites surgen de evaluar los precios relativos para $\rho_1 > \rho$ y $\rho_2 > \rho$.

En el gráfico Nº2 las curvas R_1, R_2 y S son las del gráfico Nº1 y representan las relaciones factibles desde el punto de vista tecnológico. Dada la dotación media trabajo-capital de la economía quedan determinados los límites de los intervalos factibles de variación de los precios relativos de los factores (intervalo a-b) y de los bienes (intervalo c-d).

Gráfico N° 2



9.3. RESPUESTA DE LAS PRODUCCIONES ANTE CAMBIOS EN EL PRECIO RELATIVO DE LOS BIENES

Considerando a π como parámetro, derivando las ecuaciones (1) a (9) y resolviendo, se obtienen [48]

$$\frac{dq_1}{d\pi} = -\pi \frac{dq_2}{d\pi} = \frac{1}{(\rho_2 - \rho_1)^2} \left(\frac{\pi L_1 g_2^{\;2}}{g''_1} + \frac{L_2 g_1^{\;2}}{\pi^2 g''_2} \right) \qquad (17)$$

De (17) resulta que se expande la producción del bien cuyo precio relativo aumentó y se contrae la del otro bien. Esta nueva relación se agrega en el Gráfico Nº3.

[48] Los resultados para el resto de las variables son,

$$\frac{dr}{d\pi} = \frac{g_2}{(\rho_2 - \rho_1)} \qquad (17.a)$$

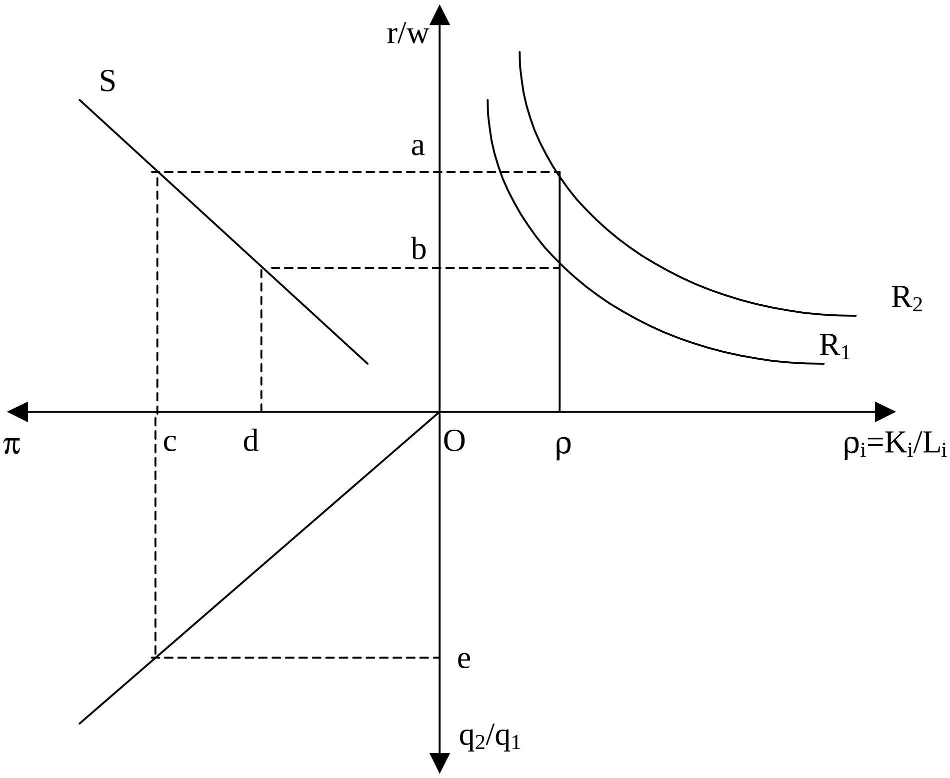
$$\frac{dw}{d\pi} = -\frac{\rho_1 g_2}{(\rho_2 - \rho_1)} \qquad (17.b)$$

$$\frac{d\rho_1}{d\pi} = \frac{g_2}{g_1''(\rho_2 - \rho_1)} \qquad (17.c)$$

$$\frac{d\rho_2}{d\pi} = \frac{g_1}{\pi^2 g_2''(\rho_2 - \rho_1)} \qquad (17.d)$$

$$\frac{dL_1}{d\pi} = -\frac{dL_2}{d\pi} = \frac{1}{(\rho_2 - \rho_1)^2} \left(\frac{g_2 L_1}{g''_1} + \frac{g_1 L_2}{\pi^2 g''_2} \right) \qquad (17.e)$$

Gráfico Nº 3

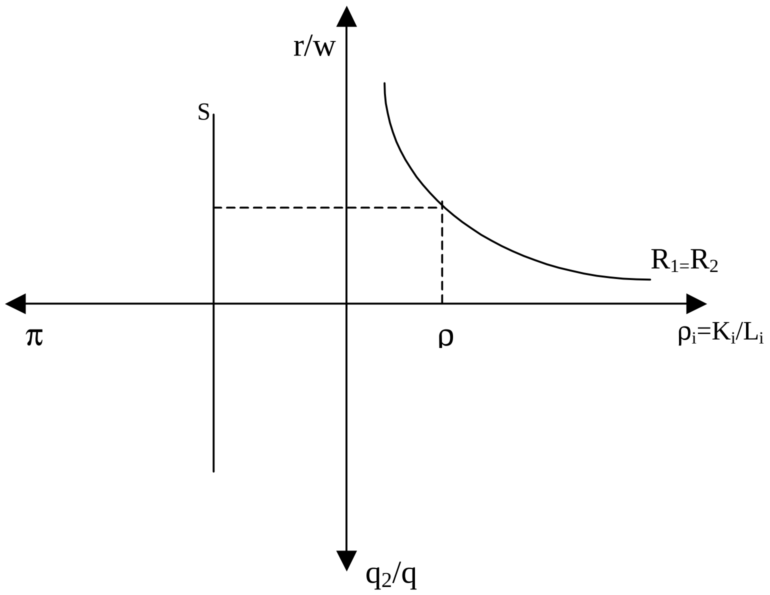


En el modelo presentado, de dos bienes y dos factores, la tecnología y las dotaciones de factores solo fijan los límites dentro de los que pueden variar el precio relativo de los bienes, el precio relativo de los factores y la distribución funcional del ingreso; pero son las fuerzas del lado de la demanda las que determinan el punto concreto en que se ubicará la economía. Los precios relativos de bienes y factores y la distribución funcional del ingreso se modifican ante cambios en la tecnología, en las dotaciones de factores y en las preferencias de los consumidores.

9.4. El caso especial en que ambas funciones de producción tienen igual intensidad de uso de factores

Si ambas funciones de producción tienen la misma intensidad de uso de factores – o sea, para cada precio relativo de los factores se verifica que $\rho_1 = \rho_2$ - las conclusiones de la sección anterior se modifican sustancialmente. En este caso la tecnología y la dotación de factores de la economía determinan los precios relativos de bienes y factores y la distribución funcional del ingreso; las preferencias de los consumidores solo son necesarias para determinar las cantidades que serán producidas de cada bien. En el gráfico Nº4 se representa este caso.

Gráfico Nº4



Como las intensidades de uso de factores son las mismas en las dos funciones de producción, las curvas R_1 y R_2 coinciden; además ante variaciones en el precio relativo de los factores, el precio relativo de los bienes no se altera. Al agregarse la restricción de la dotación de factores de la economía queda determinado el precio relativo de los factores y la distribución del ingreso; la demanda solo es importante para determinar las cantidades a producir.

9.5. EJEMPLO CON FUNCIONES COBB- DOUGLAS

1. Dadas las funciones de producción de tipo Cobb- Douglas

$$q_i = A_i K_i^{\alpha} L_i^{(1-\alpha)} \qquad i=1,2 \quad A_i>0 \quad 0<\pi_i<1$$

Como son funciones homogéneas de grado uno pueden rescribirse,

$$q_i = L_i A_i (\rho_i)^{\alpha_i} \tag{18}$$

A partir de la expresión (18) puede obtenerse el sistema (10) a (13) del texto,

$$A_1 \alpha_1 \rho_1^{\alpha_1 - 1} = \pi A_2 \alpha_2 \rho_2^{\alpha_2 - 1} \tag{19}$$
$$A_1 \rho_1^{\alpha_1} (1-\alpha_1) = \pi A_2 \rho_2^{\alpha_2} (1-\alpha_2) \tag{20}$$
$$\frac{r}{w} = \frac{\alpha_1}{1-\alpha_1} \rho_1^{-1} \tag{21}$$

El sistema formado por (19) a (21) contiene tres ecuaciones con cuatro incógnitas: ρ_1, ρ_2, π, $\frac{r}{w}$. Considerando a $\frac{r}{w}$ como parámetro pueden obtenerse las respuestas de las utilizaciones medias de los factores y del precio relativo de los bienes ante cambios en el precio relativo de los factores.

Derivando (21) con respecto a $\frac{r}{w}$ se obtiene,

$$\frac{d\rho_1}{d\frac{r}{w}} = -\frac{(1-\alpha_1)}{\alpha_1}\rho_1^{\ 2} < 0 \tag{22}$$

Similarmente, como

$$\frac{r}{w} = \frac{\alpha_2}{(1-\alpha_2)}\rho_2^{\ -1} \tag{21´}$$

derivando respecto a $\frac{r}{w}$ es[49]

$$\frac{d\rho_2}{d\frac{r}{w}} = -\frac{(1-\alpha_2)}{\alpha_2}\rho_2^{\ 2} < 0 \tag{23}$$

Derivando (19) y/o (20) respecto a $\frac{r}{w}$ y resolviendo se obtiene,

$$\frac{d\pi}{d\frac{r}{w}} = \frac{w}{r}\pi(\alpha_2 - \alpha_1) \tag{24}$$

Los signos de (22) y (23) son negativos; o sea, ante el encarecimiento relativo de un factor, ambos sectores economizarán su uso; la expresión (24) puede ser positiva, nula o negativa. Si se supone que el segundo bien es intensivo en capital se verificará para cada $\frac{r}{w}$ que $\rho_2>\rho_1$; a partir de (21) y de (21´) surge que si $\rho_2>\rho_1$, será

$$\frac{\alpha_2}{(1-\alpha_2)} > \frac{\alpha_1}{(1-\alpha_1)}$$

y por consiguiente, $\pi_2>\pi_1$.

Similarmente se demuestra que si $\rho_2=\rho_1$ será $\pi_2=\pi_1$ y si $\rho_2<\rho_1$ será $\pi_2<\pi_1$. La expresión (24) indica entonces que antes un incremento en el precio relativo de un factor se incrementará el precio relativo del bien que usa en forma intensiva ese factor.

2. Supóngase que los parámetros de las funciones- Douglas dados por (18) son: $A_1=30$, $A_2= 10$, $\pi_1=1/3$, $\pi_2=1/2$. Considérese además que las dotaciones de factores de la economía son K=400, L=100. Reemplazando los valores de los parámetros en el sistema (19) a (21) se obtienen,

[49] Completando elasticidades en (22) y (23) se verifica una de las propiedades de las funciones Cobb-Douglas: son funciones con elasticidad de sustitución igual a la unidad.

$$30\frac{1}{3}\rho_1^{-2/3} = \pi 10\frac{1}{2}\rho_2^{-1/2} \tag{25}$$

$$30\frac{2}{3}\rho_1^{1/3} = \pi 10\frac{1}{2}\rho_2^{1/2} \tag{26}$$

$$\frac{r}{w} = \frac{1}{2}\frac{1}{\rho_1} = \frac{1}{\rho_2} \tag{27}$$

Los valores límites para el precio relativo de los factores se obtienen hallando el valor de (27) cuando $\rho_1=\rho$ y $\rho_2=\rho$. Como $\rho=4$,

Si $\rho_2 = \rho$ es $\frac{r}{w} = \frac{1}{4}$

Si $\rho_1 = \rho$ es $\frac{r}{w} = \frac{1}{8}$

A partir de (25) es

$$\pi = \frac{30\frac{1}{3}\rho_1^{-2/3}}{10\frac{1}{2}\rho_2^{-1/2}} \tag{28}$$

De (27) resulta $\rho_1 = \frac{1}{2}\rho_2$; reemplazando en (28) y reordenando es

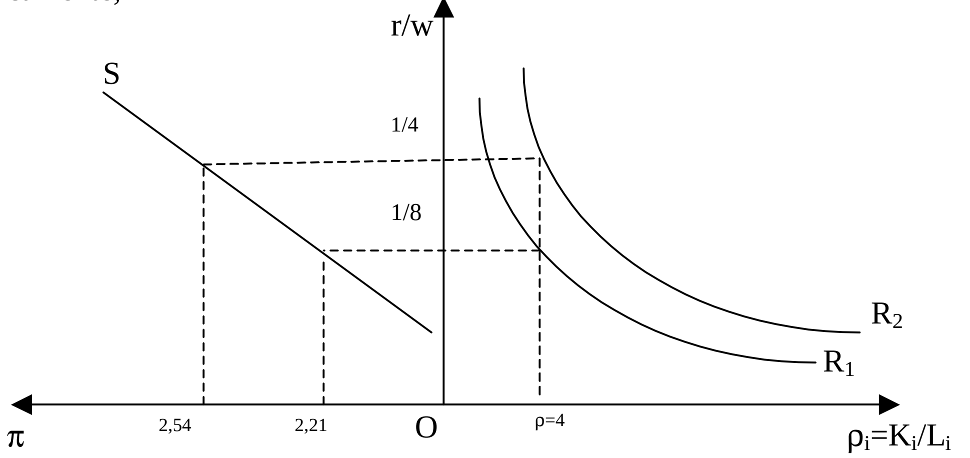
$$\pi = (\frac{1}{2})^{-5/3}\rho_2^{-1/6} \tag{29}$$

y los precios relativos límites para los bienes son:

$\pi máximo = (\frac{1}{2})^{-5/3}4^{-1/6} = 2{,}54$

$\pi mímimo = (\frac{1}{2})^{-5/3}8^{-1/6} = 2{,}21$

Gráficamente,



Los valores límites para la distribución relativa del ingreso son,

$$Máximo = \frac{r}{w}\rho = \frac{1}{4}4 = 1$$
$$Mímimo = \frac{r}{w}\rho = \frac{1}{8}4 = \frac{1}{2}$$

En el primer caso, el ingreso se reparte igualitariamente entre ambos factores (wL=rK) y en el segundo la participación del capital es la mitad de la participación del trabajo (un tercio del ingreso para los capitalistas y dos tercios para los trabajadores).

9.6. PROBLEMAS

Problema N°1

Utilizando los diagramas de la Caja de Edgeworth- Bowley y de la función de transformación, ubicar los intervalos a-b y c-d del gráfico Nº3.

Problema N°2

Representar las relaciones del Gráfico Nº4 en los diagramas de Caja de Edgeworth-Bowley y de la función de transformación.

Problema N°3

Suponiendo que los parámetros de las funciones dadas por (18) son A_1=30; A_2=10; $\alpha_1 = \frac{1}{2}$; $\alpha_2 = \frac{1}{2}$ y que las dotaciones de factores son K=400, L=100, hallar: (i) los precios relativos de factores y bienes; (ii) la distribución relativa del ingreso entre los factores.

NOTA SOBRE LA ELASTICIDAD DE SUSTITUCIÓN ENTRE BIENES EN LA PRODUCCIÓN

10. NOTA SOBRE LA ELASTICIDAD DE SUSTITUCIÓN ENTRE BIENES EN LA PRODUCCIÓN[50]

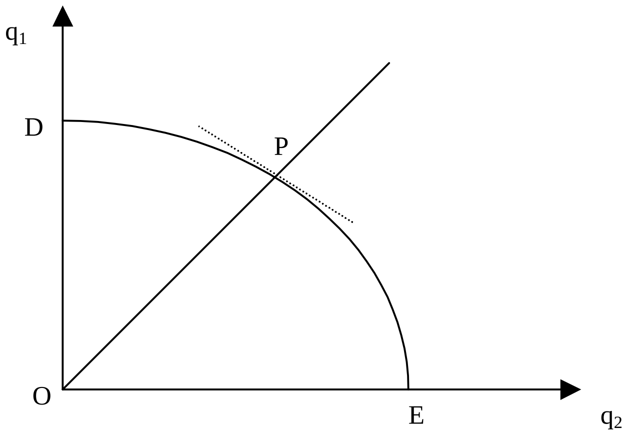
10.1. INTRODUCCIÓN

En dos trabajos anteriores escritos en colaboración con Dieguez (1972, 1973), el concepto de elasticidad de sustitución entre bienes en la producción (Jones, 1965), medida sobre la función de transformación, fue utilizado para analizar los efectos de cambios en distintos parámetros del modelo neoclásico de equilibrio general – dotación de factores, términos de intercambio y cambio tecnológico. El objetivo de esta nota es, por un lado, presentar dos expresiones para la elasticidad de sustitución entre bienes según que las ofertas de factores sean perfectamente inelásticas o que, al menos para uno de los factores, la oferta muestre elasticidad distinta de cero a precios y/o ingreso; por otro lado, se analizan los determinantes del valor de la elasticidad de sustitución entre bienes.

10.2. LA PRESENTACIÓN GRÁFICA

Supóngase un modelo de dos bienes y dos factores y que la función de transformación resultante es cóncava hacia el origen, como DPE en el gráfico Nº1. La elasticidad de sustitución entre bienes es el cociente entre la variación porcentual de la pendiente de OP y la variación porcentual de la pendiente de la tangente a la función de transformación en el punto P, cuando el punto P se mueve a lo largo de la función de transformación.

Gráfico 1



[50] Revisión y actualización de la Nota de Clase de Alberto Porto que con el mismo título se publicó en Cuadernos, Nº 26, FCE, UNLP, La Plata, Octubre de 1980.

10.3. LA ELASTICIDAD DE SUSTITUCIÓN ENTRE BIENES, MEDIDA SOBRE LA FUNCIÓN DE TRNASFORMACIÓN, CUANDO LA OFERTA DE FACTORES ES COMPLETAMENTE INELÁSTICA.

El modelo neoclásico de equilibrio general – lado de la producción- puede representarse con el siguiente sistema de ecuaciones[51],

$$q_1 = L_1 g_1(\rho_1) \quad (1)$$
$$q_2 = L_2 g_2(\rho_2) \quad (2)$$
$$w = g_1 - g'_1 \rho_1 \quad (3)$$
$$w = \pi(g_2 - g'_2 \rho_2) \quad (4)$$
$$r = g'_1 \quad (5)$$
$$r = g'_1 \ r = \pi g'_2 \quad (6)$$
$$L_1 + L_2 = L \quad (7)$$
$$\rho_1 L_1 + \rho_2 L_2 = K \quad (8)$$

Las ecuaciones (1) y (2) son las funciones de producción de los dos bienes; como existen rendimientos constantes a escala, el nivel de la producción de cada bien (q_i) es función de la utilización media capital- trabajo $\rho_i = \frac{K_i}{L_i}$ y de un factor de escala L_i, que es la cantidad de trabajo asignada al sector i. Se supone que las productividades marginales son positivas y decrecientes para ambos factores y que el bien q_1 es intensivo en trabajo y q_2 en capital – o sea que a un mismo precio relativo de los factores se verifica que $\rho_2 > \rho_1$. Las ecuaciones (3) a (6) son las condiciones marginales de equilibrio- cada factor es remunerado según el valor de su productividad marginal; en competencia perfecta, esa remuneración es la misma en ambos sectores; π es le precio de q_2 en términos de q_1 – bien adoptado como numerario; w y r son las remuneraciones del trabajo y el capital, respectivamente, ambos en términos del numerario. Las ecuaciones (7) y (8) representan la condición de pleno empleo de ambos factores; L y K son las ofertas fijas de trabajo y capital, respectivamente.

Considerando a π como parámetro y derivando, se obtienen los siguientes resultados,

$$\frac{dr}{d\pi} = \frac{g_2}{(\rho_2 - \rho_1)} \quad (9)$$

$$\frac{dw}{d\pi} = -\frac{\rho_1 g_2}{(\rho_2 - \rho_1)} \quad (10)$$

$$\frac{d\rho_1}{d\pi} = \frac{g_2}{g_1''(\rho_2 - \rho_1)} \quad (11)$$

---

[51] Para más detalle ver Dieguez y Porto (1972); en el apéndice de ese trabajo se obtienen las expresiones matemáticas que se utilizan en esta nota.

$$\frac{d\rho_2}{d\pi} = \frac{g_1}{\pi^2 g_2''(\rho_2 - \rho_1)} \tag{12}$$

$$\frac{dL_1}{d\pi} = -\frac{dL_2}{d\pi} = \frac{1}{(\rho_2 - \rho_1)^2}\left(\frac{g_2 L_1}{g_1''} + \frac{g_1 L_2}{\pi^2 g_2''}\right) = M \tag{13}$$

$$\frac{dq_1}{d\pi} = -\pi\frac{dq_2}{d\pi} = \frac{1}{(\rho_2 - \rho_1)^2}\left(\frac{L_1 g_2^{\,2}}{g_1''} + \frac{L_2 g_1^{\,2}}{\pi^2 g_2''}\right) = J \tag{14}$$

La elasticidad de sustitución entre bienes σ_f se define como

$$\sigma_f = \frac{\dfrac{dq_2}{q_2} - \dfrac{dq_1}{q_1}}{\dfrac{d\pi}{\pi}} \tag{15}$$

que, completando tasas de cambio y utilizando (13), (14) y la definición de elasticidad de sustitución entre factores en la producción de cada bien $(\sigma_i; i = 1,2,)$[52], puede expresarse como

$$\sigma_f = \frac{1}{(\rho 2 - \rho 1)^2 g'_1 (g_1 - \rho g'_1)}\left(\frac{g_1^{\,2}}{z_1}\rho_2\sigma_2 + \frac{\pi g_2^{\,2}}{z_2}\rho_1\sigma_1\right) \tag{16}$$

donde z_i es la participación del bien i en el ingreso agregado de la economía.

A partir de (15) se obtiene

$$\frac{d\pi}{\pi} = \frac{1}{\sigma_f}\left(\frac{dq_2}{q_2} - \frac{dq_1}{q_1}\right) \tag{17}$$

La expresión (17) permite analizar los efectos de un cambio en las cantidades producidas – debido, por ejemplo a un cambio en la demanda- sobre el precio relativo de los bienes[53]; el efecto depende del valor de la elasticidad de sustitución entre bienes y será tanto mayor cuanto menor sea σ_f. A su vez, la expresión (16) permite apreciar cuales son los principales determinantes del valor de σ_f; por un lado, la diferencia de intensidades de uso de los factores de las dos producciones- dada por $\rho_2 - \rho_1$; por otro lado, las elasticidades de sustitución entre factores en cada una de las producciones.

---

[52] Ver R.G.D. Allen (1966, Pág. 334/37); $\sigma_i = -\dfrac{g'_i (g_i - \rho_i g'_i)}{g_i \rho_i g_i''}$ (i=1,2)

[53] Ver J. Robinson (1968, Pág. 212/13)

Cuanto más similares sean las intensidades de uso de factores, mayor será el valor de la elasticidad de sustitución entre bienes y viceversa. Si $\rho_2 \longrightarrow \rho_1, \sigma_f \longrightarrow \infty$ y el precio relativo no se altera ante cambios en la canasta de bienes producida[54].

Cuanto mayores sean las σ_i (i=1,2) mayor será σ_f y viceversa. Si $\sigma_i \longrightarrow \infty$ $(i=1,2)$, $\sigma_f \longrightarrow \infty$ y, nuevamente, el precio relativo no se altera ante cambios en las cantidades producidas[55].

10.4. La elasticidad de sustitución entre bienes, medida sobre la función de transformación, cuando la oferta de capital es variable

Supóngase ahora que la oferta de capital es variable en función de su remuneración real y del precio relativo de los bienes; en el modelo de la sección anterior la ecuación (8) es sustituida por

$$\rho_1 L_1 + \rho_2 L_2 = K(r,\pi) \tag{8´}$$

El modelo queda formado por las ecuaciones (1) a (7) y (8´); considerando a π como un parámetro y derivando se obtiene

$$\frac{dL_1}{d\pi} = \frac{dL_2}{d\pi} = M + \frac{1}{(\rho_2 - \rho_1)} \frac{K}{\pi} (\varepsilon_{kr}\varepsilon_{r\pi} + \varepsilon_{k\pi}) \tag{18}$$

Las expresiones (11) y (12) son también válidas en este caso; la variación de las producciones viene dada por

$$\frac{dq_1}{d\pi} = J - \frac{g_1}{(\rho_2 - \rho_1)} \frac{K}{\pi} (\varepsilon_{kr}\varepsilon_{r\pi} + \varepsilon_{k\pi}) \tag{19}$$

$$\pi \frac{dq_2}{d\pi} = -J - \frac{g_2}{(\rho_2 - \rho_1)} K(\varepsilon_{kr}\varepsilon_{r\pi} + \varepsilon_{k\pi}) \tag{20}$$

donde

$\varepsilon_{kr} = \dfrac{\partial K}{\partial r}\dfrac{r}{K}$, es la elasticidad del capital ante cambios en su remuneración real;

$\varepsilon_{k\pi} = \dfrac{\partial K}{\partial \pi}\dfrac{\pi}{K}$, es la elasticidad del capital ante cambios en el precio relativo de los bienes; y

[54] En el caso de la función de transformación es una línea recta.

[55] También en este caso la función de transformación es una línea recta.

$\varepsilon_{r\pi} = \frac{\partial r}{\partial \pi}\frac{\pi}{r}$, es la elasticidad de la remuneración real del capital ante cambios en el precio relativo de los bienes; de (9) surge que $\frac{\partial r}{\partial \pi} > 0$ si $\rho_2 > \rho_1$; completando la elasticidad se verifica además que $\varepsilon_{r\pi} > 1$

En este caso el efecto sobre las producciones de un cambio en el precio relativo de los bienes puede ser dividido en dos partes: a) el indicado por los primeros términos de (19) y (20), que es el efecto del cambio en el precio relativo de los bienes con oferta fija de factores – y que, por consiguiente, es equivalente al dado por (14); b) el efecto originado por la variación de la cantidad de capital que se produce como consecuencia del cambio en π. En el segundo término,

$$\frac{dK}{d\pi} = \frac{K}{\pi}(\varepsilon_{kr}\varepsilon_{r\pi} + \varepsilon_{k\pi}) \qquad (21)$$

es la variación en la cantidad de capital originada en el cambio en el precio relativo de los bienes; y

$$-\frac{g_1}{(\rho_2 - \rho_1)}$$

y

$$\frac{g_2}{(\rho_2 - \rho_1)}$$

son los efectos sobre las producciones de q_1 y q_2, respectivamente, de cambios en la dotación de capital con π constante[56].

Si ante un aumento en π aumenta la cantidad de capital, se expande la producción del bien intensivo en ese factor y disminuye la producción del otro bien. En este caso, el efecto expansión de la dotación de capital refuerza al efecto del cambio en el precio relativo de los bienes con oferta fija de factores. Los efectos van en sentidos opuestos si ante el aumento en π disminuye la oferta de capital; en ese caso aparece la posibilidad de comportamientos perversos de modo que $\frac{dq_1}{d\pi} > 0$ y $\frac{dq_2}{d\pi} < 0$ [57].

La expresión para la elasticidad de sustitución entre bienes en la producción, cuando la oferta de capital es variable – que será denominada σ_s -, se obtiene utilizando (19) y (20), completando tasas de cambio y reemplazando,

[56] Son los “efectos Rybczynski” de cambios en la dotación de trabajo. Ver Dieguez y Porto (1972, Pág. 290 y siguientes).

[57] La oferta de capital aumenta por los efectos sustitución. La posibilidad de efectos perversos aparece cuando existen fuertes efectos ingresos de signos contrarios a los efectos sustitución.

$$\sigma_s = \sigma_f - K(\varepsilon_{kr}\varepsilon_{r\pi} + \varepsilon_{k\pi})\frac{L}{L_1L_2(\rho_2 - \rho_1)} \tag{23}$$

que puede rescribirse[58],

$$\sigma_s = \sigma_f + \varepsilon_{k\pi}R \tag{24}$$

siendo,

$$\varepsilon_{k\pi} = \frac{dK}{d\pi}\frac{\pi}{K}$$

$$R = \frac{LK}{L_1L_2(\rho_2 - \rho_1)}$$

La relación entre cambios en el precio relativo y las cantidades relativas producidas viene dada ahora por

$$\frac{d\pi}{\pi} = \frac{1}{\sigma_s}\left(\frac{dq_2}{q_2} - \frac{dq_1}{q_1}\right) \tag{25}$$

En la determinación del valor de σ_s influyen, como antes, la diferencia de intensidades de uso de factores $(\rho_2 - \rho_1)$ y las elasticidades de sustitución entre factores en la producción de cada uno de los bienes $(\sigma_i; i = 1,2)$, agregándose ahora la elasticidad de la oferta del capital ante cambios en el precio relativo de los bienes. Cuanto mayor sea esta elasticidad, mayor será σ_s; cuando $\varepsilon_{k\pi} \longrightarrow \infty, \sigma_s \longrightarrow \infty$ [59]. En este caso, además σ_s puede ser negativa si $\varepsilon_{k\pi} < 0$ [60] y $\varepsilon_{k\pi}R$ es mayor, en valor absoluto que σ_f .

[58] Obsérvese que en el caso de oferta variable de un factor, influye la elasticidad de la oferta del factor ($\varepsilon_{k\pi}$) y las intensidades de uso de factores.

[59] En este caso, también la función de transformación sería una línea recta.

[60] Cfr. J. Robinson (1968, Pág. 217/18)

BIBLIOGRAFÍA

[1] R.G.D.Allen: Análisis Matemático para economistas, Séptima Edición Aguilar. Madrid, 1966.

[2] F. M. Bator: Análisis simplificado de la maximización del bienestar, en Breit y Hochman (eds.): Microeconomía, Segunda Edición. Ed. Interamericana, México, 1973.

[3] J.C. Berra y A. Porto: Notas sobre la teoría de la distribución y la teoría de la demanda de los factores de la producción. Económica, La Plata, Nº3, 1971.

[4] M. Bronfenbrenner: Notes on the elasticity of derived demand, Oxford Economic Papers, 1961.

[5] M. Brown: On the Theory and Measurement of Technological Change, Cambridge University Press., 1966.

[6] J.C. de Pablo: Una reseña sobre la frontera de posibilidades de producción, Económica, La Plata, Nº2, Mayo-Agosto de 1971.

[7] H. L. Dieguez: Función de transformación y funciones de producción, Económica, Nº1, La Plata, Enero-Abril de 1971.

[8] H.L.Dieguez y A. Porto: Problemas de Microeconomía, Amorrortu Editores, Buenos Aires, 1972.

[9] H.L.Dieguez y A. Porto: Un modelo simple de equilibrio general: acumulación de factores y variación de los términos de intercambio. Económica, La Plata, nro.3, septiembre-diciembre de 1972.

[10] R. Findlay: Trade and Specialization, Penguin Books, 1970.

[11] M. Friedman: Teoría de los precios, Alianza Editorial, Madrid,1972.

[12] J.R.Hicks: The Theory of wages, Second Edition, Macmillan, New York, 1964.

[13] F.S.T.Hsiao: Some notes on the elasticity of sustitution, The American Economic Review, nro. 3, June 1969.

[14] G.A. Jehle: Advanced Microeconomic Theory, Prentice Hall, 1991.

[15] R. W. Jones: The structure of simple general equilibrium models, The Journal of Political Economy, Nº6, December, 1965.

[16] P.R.G. Layard, y A.A: Walters: Microeconmic Theory, Mc Graw Hill, 1990.

[17] D.G. Luenberger: Microeconomic Theory, Mc Graw Hill, 1995.

[18] A. Marshall: Principios de Economía, Aguilar, Madrid, 1957.

[19] Mas-Colell, M.D. Whinston y J.R.Green: Microeconomic Theory, Oxford University Press, 1995.

[20] A.Porto: Notas de Microeconomía, Cuadernos Nro. 34, Instituto de Investigaciones Económicas, Facultad de Ciencias Económicas, Universidad Nacional de La Plata, 1982.

[21] A. Porto: Una nota sobre la tercera "ley" de la demanda derivada, Económica, La Plata, Nº 3, 1980.

[22] A.Porto: La distribución funcional del ingreso en el modelo unisectorial de Hicks. Revista de la Facultad de Ciencias Económicas, Universidad Nacional de Cuyo, nro. 76, enero 1974-diciembre 1977.

[23] A.Porto: Una nota sobre la distribución del ingreso en un modelo Ricardiano, Revista Económica, La Plata, Nº1, 1976.

[24] J. Robinson: El precio creciente de oferta en G. J. Stigler y K.E. Boulding (eds.), Ensayos sobre la teoría de los Precios, Aguilar, Madrid (Tercera Edición), 1968.

[25] K.M. Savosnik: The box diagram and the production possibility curve, Economisk Tidskrift, September 1958.

[26] T. Scitovsky: Competencia y Bienestar, Amorrortu Editorres, Buenos Aires, 1967.

[27] E.Silberberg: The structure of economics. A mathematical Analysis. Second EditionMc.Grow-Hill, 1990.

[28] G. J. Stigler: The Theory of Price, Third Edition, Macmillan, 1969.

[29] H.R.Varian: Microeconomía intermedia. Un enfoque moderno, Tercera Edición, Antoni Bosch Editor, Barcelona, 1994.

[30] H.R.Varian: Microeconomic Analysis, Third Edition, Norton, 1992. Versión en castellano de A. Bosch Ed., Barcelona , 1998.